

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ**

**РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени Серго Орджоникидзе  
(МГРИ)**

---



**А. Д. Каринский**

**Влияние локальных объектов на результаты некоторых  
методов электроразведки; данные математического  
моделирования**

Москва, 2022 г.

© Каринский А. Д., 2022

**УДК 550.83.15+550.83.17+512.550.3**

**Каринский А. Д.** Влияние локальных объектов на результаты некоторых методов электроразведки; данные математического моделирования – 82 с.

Дано обоснование методикам численных расчётов стационарного электрического поля  $E$  и гармонически меняющегося электромагнитного поля для некоторых методов электроразведки и нескольких 3D-моделей среды. Эти модели отвечают условиям, когда отличающийся по удельному электрическому сопротивлению  $\rho$  (или по удельному электрическому сопротивлению  $\rho$  и диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ ) от вмещающей среды и имеющий малые размеры объект  $V_i$ , либо имеющий различную форму локальный объект  $V_0$ , расположен в проводящем полупространстве или в горизонтально-слоистой модели среды, либо (в разделе 3) – в однородной среде. Объект  $V_0$  может иметь форму шара, куба, эллипсоида... . Приведены результаты математического моделирования для различных установок метода сопротивлений электроразведки, метода магнитотеллурических зондирований, метода заряда, а также для зондов каротажа сопротивления. Показано то, какое влияние малые объекты  $V_i$  или имеющие конечные размеры и различную форму объекты  $V_0$  могут оказывать на результаты измерений в этих методах.

Приведенные в этой работе результаты моделирования, в частности, могут оказаться полезными при изучении студентами геофизической специальности курса "Электроразведка" и также, возможно, курса "Геофизические методы исследования скважин".

*Рецензент:*

Шевнин Владимир Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры Геофизических методов исследования земной коры Геологического факультета МГУ.

Иллюстраций 44, список литературы – 48 названий.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. Влияние различных областей пространства на результаты некоторых электрических и электромагнитных методов геофизики .....	6
1.1. Влияние малого объекта изометричной формы на стационарное электрическое поле .....	7
1.2. Примеры моделирования для оценки областей пространства, оказывающей влияние на установки метода сопротивлений.....	10
1.3. Влияние малого объекта изометричной формы на гармонически меняющееся ЭМ поле .....	13
1.4. Влияние малых объектов $V_i$ на напряжение в измерительной антенне переменного электрического поля, возбуждаемого генераторной антенной	16
1.5. Примеры моделирования для оценки области пространства, оказывающей существенное влияние на результаты радиоволнового просвечивания .	17
2. Влияние локальных объектов на результаты методов сопротивлений электроразведки.....	23
2.1. Локальный объект $V_i$ в однородном проводящем полупространстве	23
2.2. Локальный объект $V_i$ в верхнем слое трёхслойной модели среды...	24
2.3. Моделирование С-эффекта и Р-эффекта в методах сопротивлений электроразведки .....	27
2.3.1. Пример результатов моделирования для электропрофилирования .....	29
2.3.2. Примеры моделирования результатов ВЭЗ.....	30
2.3.3. Представление зависимости влияния объекта $V_i$ на величину $\rho_k$ от положения эпицентра $V_i$ относительно электродов в виде карты.....	34
2.4. Влияние различных по форме объектов на результаты метода сопротивлений .....	36
2.4.1. Методика расчётов.....	36
2.4.2. Результаты моделирования .....	41
3. Влияние локальных объектов на результаты каротажа сопротивлений .	48
4. Влияние локального объекта на результаты магнитотеллурических зондирований.....	52
4.1. Локальный объект $V_0$ в однородном проводящем полупространстве	53
4.2. Двухслойное проводящее полупространство .....	57
4.2.1. Нормальное поле .....	57
4.2.2. Результаты моделирования .....	59
4.3. Трёхслойное проводящее полупространство.....	62
4.3.1. Нормальное поле .....	62
4.3.2. Результаты моделирования .....	64
5. К методу заряда.....	67
5.1. Методика расчётов.....	67
5.2. Результаты моделирования .....	70
ЛИТЕРАТУРА.....	79

## ***ВВЕДЕНИЕ***

Одним из важных направлений в развитии теории электрических и электромагнитных методов разведочной геофизики является разработка приближенных методов решения прямых задач для "сложных" моделей геологической среды. Актуальность этой проблемы определяет то, что реальные геологические среды, с которыми приходится иметь дело на практике, являются сложно построенными трехмерными структурами. Вместе с тем при обосновании каждого из геофизических методов электроразведки, при развитии его теории и обосновании методики интерпретации результатов измерений первоначально пользовались, в основном, базовыми упрощенными одномерными (1D) моделями среды не учитывающими наличие ряда факторов, зачастую оказывающих значительное влияние на характеристики электромагнитного поля и результаты интерпретации данных измерений. Для таких упрощенных, одномерных моделей среды, решения прямых задач теории методов электроразведки могут быть получены в виде аналитических выражений. Эти решения могут иметь вид, доступный для "прямого" математического анализа, либо для анализа результатов численных расчётов, получаемых на основе математического моделирования при применении относительно простых алгоритмов расчётов.

Реальным геологическим средам соответствуют трёхмерные (3D) модели среды. В этом случае параметры моделей среды, оказывающие влияние на физические поля и результаты геофизических измерений, зависят от трёх координат, например, от координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в декартовой системе координат. Для таких, приближающихся к реальным геологическим средам трёхмерных моделей среды, решения прямых задач теории методов электроразведки не могут быть получены в аналитическом виде. Для приближённого численного решения трёхмерных задач можно воспользоваться тем или иным методом численного моделирования, применённым (в соответствии выбранным методом решения) алгоритмом численных расчётов и его реализацией в качестве программы для компьютера.

Разработка того или иного метода численного решения трёхмерных прямых задач теории методов электроразведки и получение на этой основе алгоритмов расчётов и "экономичных по времени вычислений" программ для компьютера, позволяющих (за достаточно малое время) получить результаты 3D-моделирования является не очень простой задачей и одним из важных направлений в развитии теории электрических и электромагнитных методов разведочной геофизики. Поэтому поиск и обоснование оптимальных приближенных методов решения трёхмерных прямых задач теории применяемых в геофизике электрических и электромагнитных методов и (на этой основе) – решения обратных задач (количественной интерпретации результатов измерений) имеет большое значение. Такие исследования позволяют оценить влияние на результаты этих методов ряда факторов, не учитывавшихся ранее при интерпретации результатов измерений в методах электроразведки.

В частности, количественная оценка влияния отдельных областей среды на измеряемые характеристики поля и определение на этой основе области

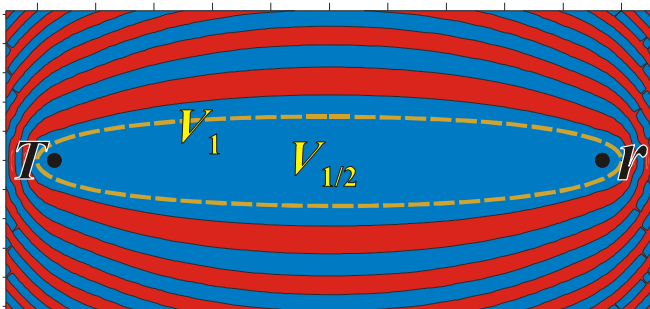
пространства, оказывающей наиболее существенное влияние на результаты наблюдений, является весьма важной для электрических и электромагнитных методов геофизики. На этой основе возможно создание физически обоснованного подхода к определению эффективности существующих и новых геофизических методов, обоснование методики интерпретации результатов измерений. В электрических и электромагнитных геофизических методах такой подход, несмотря на свою плодотворность, получил обоснование и развитие только в нескольких следующих случаях.

1. При применении радиоволновых методов – таких, например, как радиоволновое просвечивание, нередко справедливы условия, при выполнении которых в горных породах плотность токов смещения, значительно превышает плотность токов проводимости. В этом случае для такой проводящей среды иногда употребляют термин "несовершенный диэлектрик". При расчётах поля или при интерпретации результатов измерений, пренебрегая токами проводимости по сравнению с токами смещения, такую среду можно (с некоторой погрешностью) заменить изолятором. Тогда в однородных по электромагнитным параметрам областях среды для векторов электромагнитного (ЭМ) поля вместо телеграфных уравнений получаем волновые уравнения. В соответствии с принципом Гюйгенса – Френеля каждую точку пространства, охваченного волновым процессом, можно рассматривать как источник вторичных волн. Математическое обоснование этому дают формулы Кирхгофа и Пуассона. Но такой подход обоснован для случая распространения электромагнитного поля в изоляторе, либо поля упругих смещений в абсолютно-упругой среде, когда поля распространяются без затухания и в однородных областях среды удовлетворяют волновым уравнениям.

В случае гармонически меняющегося ЭМ поля в изоляторе волновое число  $k$  в уравнении Гельмгольца является действительной величиной. В последнем случае в соответствии с теорией О. Ж. Френеля, при бесконечно малых размерах стороннего возбудителя поля и датчика (генераторной  $T$  и измерительной  $r$  антенн) областью пространства, оказывающей существенное влияние на результаты измерений, является часть среды в форме эллипсоида вращения с фокусами в точках  $T$  и  $r$  и площадью поперечного сечения, соответствующей половине первой зоны Френеля. Эта площадь тем меньше, чем меньше длина

волны  $\lambda$ . При очень коротких длинах волн для анализа особенностей распространения ЭМ поля в среде возникает возможность пользоваться представлениями геометрической оптики.

На рис. 1 показано сечение зон Френеля плоскостью рисунка, проходящей через точки  $T$  и  $r$ . Центральная область синего цвета соответствует 1-й зоне Френеля  $V_1$ , а



**Рис 1.** Сечение первой зоны Френеля  $V_1$  и области  $V_{1/2}$ , оказывающей существенное влияние на распространение волн

её ограниченная штриховой линией часть  $V_{1/2}$  (половина первой зоны Френеля) – это область, существенно влияющая на распространение волн от точечной генераторной антенны  $T$  до точечной измерительной антенны  $r$ . Вкладами источников вторичных волн, расположенных вне области  $V_{1/2}$ , в поле в точке  $r$  можно пренебречь.

2. Некоторое время тому назад понятием "область пространства, оказывающая существенное влияние на результаты наблюдений" начали пользоваться и в методах постоянного тока – в методах сопротивления электроразведки. Обоснование такого подхода приведено в работе [McGillivray, Oldenburg, 1999]. Позже этой проблемой занимались Т. Dahlin, В Zhou и М. Н. Loke ([Dahlin, Loke, 2002], [Dahlin, Zhou, 2004]). М. Локе, включил программу расчета чувствительности для разных установок ВЭЗ, в программу 2D – инверсии. По всему исследуемому разрезу перемещается элементарный объём  $V_i$  с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_i$  отличающимся от  $\rho$  вмещающей среды. Вычисляются производные Фреше (или чувствительности). Получаемые данные наглядно демонстрируют вклад отдельных участков среды в результаты измерений. На эти публикации любезно обратил наше внимание профессор кафедры Геофизических методов исследования земной коры Геологического факультета МГУ В. А. Шевнин.

3. Иной подход к определению понятия "область пространства, оказывающая существенное влияние на результаты наблюдений" обоснован Г. Доллем, в связи с созданием приближенной теории индукционного каротажа (ИК), [Doll, 1950]. В рамках этой теории в ближней зоне вклад индуцированных в среде токов во вторичное магнитное поле и измеряемый сигнал зависит от положения любой малой области пространства относительно генераторной и измерительной катушек и удельной электропроводности среды. Эта приближенная теория послужила основой для обоснования методики интерпретации данных индукционного каротажа и для создания сложных фокусирующих зондов ИК.

Однако, общего подхода к построению приближенной теории методов переменного электромагнитного поля при различных параметрах 3D-модели среды, частоте поля, расположении измерителей в любой зоне возбудителя (ближней, дальней, промежуточной), различных конфигурациях возбудителей и измерителей поля в геофизике быть не может. Соответственно не может быть и общего подхода к количественной оценке того, какие области исследуемого пространства, либо какие объекты, их параметры и их пространственное положение, оказывают существенное влияние на результаты измерений. Возможно приведенные в этой работе методики численных расчётов и результаты математического моделирования послужат небольшим вкладом в решение этого вопроса.

### ***1. Влияние различных областей пространства на результаты некоторых электрических и электромагнитных методов геофизики***

Анализ некоторых полученных нами результатов математического моделирования показал, что для определения понятия "область пространства оказывающая существенное влияние на результаты наблюдений" в электрических и электромагнитных методах геофизики может быть применён подход, имеющий некоторое сходство с теорией О. Ж. Френеля. Но, в отличие от этой теории, обоснованной применительно к волновым полям, предлагаемой методикой расчётов можно воспользоваться и для стационарного электрического поля и для переменного ЭМ поля не только в изоляторе, но также и в проводящей среде. При этом несущественно также то, какую протяжённость имеют сторонние возбудители поля и датчики.

Можно было предположить, что при изометричной форме бесконечно-малых по размерам объектов  $V_i$  с объёмом  $v_i$ , отличающихся по ЭМ параметрам от вмещающей их среды, обусловленное такими объектами вторичное поле  $\mathbf{E}^B$  должно быть не просто подобно, а идентично полям диполей с моментами  $\mathbf{p}$ , параллельными или антипараллельными полю  $\mathbf{E}^H$  в центрах этих элементов. Ясно, что в случае стационарного электрического поля (в соответствии с работой Л. М. Альпина [Альпин, 1947]) для моделей кусочно-однородной изотропной среды источниками кулоновой (гальванической) составляющей поля  $\mathbf{E}^B$  являются поверхностные заряды, индуцированные электрическим полем  $\mathbf{E}$  на поверхностях объектов  $V_i$  (см. также [Альпин и др., 2020, а]). В случае переменного ЭМ поля составляющая  $\mathbf{E}^B$  будет ещё иметь индукционное (вихревое) слагаемое, обусловленное влиянием объектов на поле вектора плотности  $\mathbf{j}^Z = \mathbf{j} + \mathbf{j}^{CM}$  полного тока, его магнитное поле  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^H + \mathbf{H}^B$  и возбуждаемую переменным полем  $\mathbf{H}$  индукционную составляющую поля  $\mathbf{E}$ . Дополнительное влияние на переменное ЭМ поле должно оказывать присутствие в среде магнитных объектов, но в этой работе влияние таких объектов рассмотрено не будет.

Анализ полученных результатов моделирования позволил выдвинуть предположение о возможности применения (не противоречащего теории Френеля) подхода к определению понятия "область пространства, оказывающая существенное влияние на результаты электромагнитных методов геофизики". Суть такого подхода состоит в следующем.

При нарушении однородности (проводящей, либо не проводящей) немагнитной среды по электрическим параметрам в имеющей изометричную форму области  $V_i$ , достаточно малой для того, чтобы в пределах этой области ЭМ поле можно было считать однородным, возбуждается вторичное ЭМ поле, подобное полю (постоянного, либо переменного) электрического диполя с центром  $a$  в центре области  $V_i$ . Момент  $\mathbf{p}$  такого электрического диполя зависит от направления суммарного электрического поля  $\mathbf{E}$  в области  $V_i$ , а также от электрических параметров среды в объекте  $V_i$  и окружающей его (внешней) области  $V_e$ . Характеристики полей  $\mathbf{E}^H$  и  $\mathbf{E}$  зависят, конечно, также от положения и

типа возбудителя поля и, в случае гармонически меняющегося ЭМ поля – от частоты, амплитуд и фаз компонент  $\mathbf{E}^n$ . Таким образом, напряжение поля  $\mathbf{E}$  в измерительной линии  $MN$ , измерительной антенне  $r$  или другом датчике может быть вычислено на основе суммирования полей элементарных диполей, расположенных, как и малые объёмы  $V_i$ , в разных частях среды. Путём анализа результатов численных расчётов, выполненных при заданной частоте, параметрах модели среды, той или иной ориентации линий  $AB$  и  $MN$ , либо антенн – генераторной  $T$  и измерительной  $r$ , можно определить, область среды оказывающей основное влияние на результаты измерений.

Важно отметить, что при таком подходе не существенно то находятся ли малая область  $V_i$  или измеритель ( $MN$ ,  $r$ ) в ближней, промежуточной или дальней зоне возбудителя ( $AB$ ,  $T$ ) поля, а также то, является ли среда изолятором или проводником. То есть не исключено, что данный подход может быть более универсальным, чем основанные на теории Френеля представления об области, существенной для распространения электромагнитных волн в изоляторе, или упоминавшийся выше способ оценки области среды, оказывающей существенное влияние на результаты измерений характеристик стационарного поля  $\mathbf{E}$ , применяемый в методах сопротивлений при постоянном токе.

Можно было также предположить, что в случае переменного ЭМ поля и магнитных и проводящих объектов в малых областях  $V_i$ , каждому такому объекту должна быть поставлена в соответствие совокупность 2-х элементарных возбудителей вторичного ЭМ поля – электрического диполя с моментом  $\mathbf{p}$ , коллинеарным направлению поля  $\mathbf{E}$ , и магнитного диполя с моментом  $\mathbf{M}$  коллинеарным направлению магнитного поля  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ .

Ниже представлены выражения, полученные с целью обоснования применения предлагаемого подхода и полученные на этой основе результаты математического моделирования. Рассмотрены случаи стационарного электрического поля  $\mathbf{E}$  и гармонически меняющегося электромагнитного поля.

### ***1.1. Влияние малого объекта изометричной формы на стационарное электрическое поле***

Начнём с общеизвестного. Если в однородной по удельному электрическому сопротивлению  $\rho$  вмещающей среде (с  $\rho = \rho_e = \rho_{\text{вм}}$ ) расположен однородный объект ("включение" в среде) с  $\rho = \rho_i$ , то в присутствии стационарного электрического поля  $\mathbf{E}$  и при  $\rho_i \neq \rho_e$  индуцированные на границе объекта поверхностные электрические заряды (в виде простого слоя) создают вторичное поле  $\mathbf{E}^B$ . Вследствие этого суммарное поле  $\mathbf{E}$  будет отличаться от того поля  $\mathbf{E}^n$ , которое существовало бы в отсутствии этого объекта. При изометричной форме объекта на достаточно большом расстоянии от него по сравнению с его размерами поле  $\mathbf{E}^B$  подобно полю электрического диполя с моментом  $\mathbf{p}$ . В частности, как показано, например, в книге [Альпин, 1971], если объект  $V_i$  с объёмом  $\nu_i$  имеет форму шара с радиусом  $R_{\text{ш}}$ , а поле  $\mathbf{E}^n$  однородно в пределах этого объекта, то вне объекта  $V_i$



поле  $\mathbf{E}^B$  подобно полю электрического диполя с центром в центре шара и с моментом

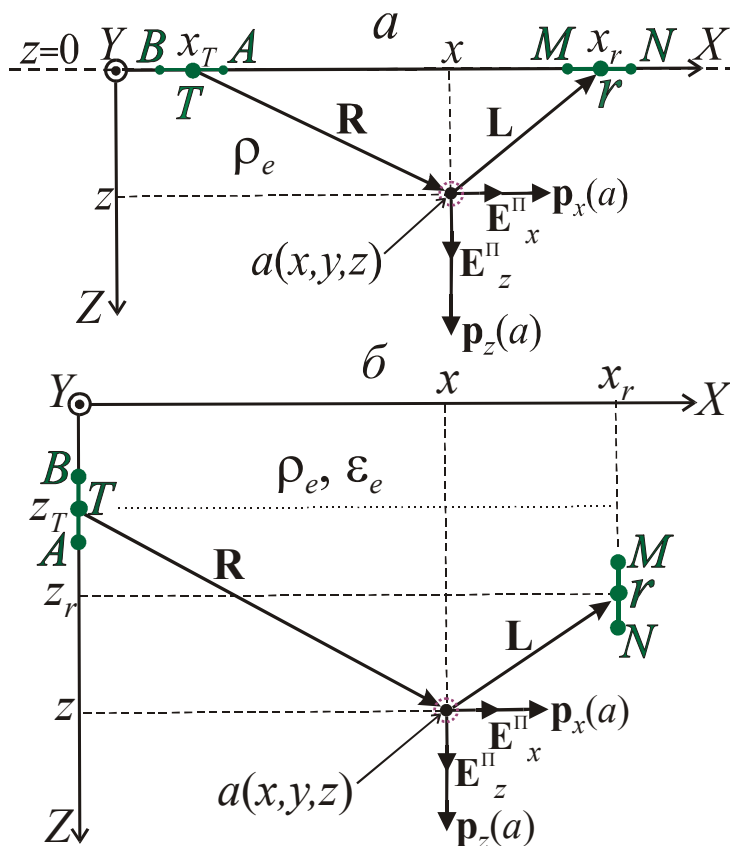
$$\mathbf{p} = F \cdot \mathbf{E}^n, \text{ где } F = 3\varepsilon_0 \cdot C \cdot v_i, \quad C = \frac{1 - (\rho_i / \rho_e)}{1 + 2 \cdot (\rho_i / \rho_e)}, \quad (1)$$

объём шара  $v_i = 4\pi R_{\text{ш}}^3 / 3, \text{ м}^3, \quad \varepsilon_0 = 1 / (c^2 \cdot \mu_0), \text{ Ф/м}$  – электрическая постоянная,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}, \text{ Гн/м}$  – магнитная постоянная, а  $c \approx 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  – электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме. Если область  $V_i$  имеет иную, чем шар, (но изометричную) форму, например форму куба, то, по видимому, можно допустить, что момент  $\mathbf{p}$  также приближённо определяет выражение (1) – при большом расстоянии от точки наблюдения (в которой мы определяем поле  $\mathbf{E}^B$ ) до области  $V_i$  по сравнению с линейными размерами области  $V_i$ . Значения  $F > 0$  и  $F < 0$  в (1) отвечают влиянию объекта при  $\rho_i < \rho_e$  и  $\rho_i > \rho_e$  соответственно.

Примем допущение, что, в отсутствии других объектов, каждый малый объект  $V_i$  отличающийся по удельному электрическому сопротивлению  $\rho$  от вмещающей среды, создаёт в окружающем его пространстве поле, идентичное полю диполя с моментом  $\mathbf{p}$ , который приближённо определяет выражение (1). Тогда согласно (1) при  $\rho_e > \rho_i$  имеем  $\mathbf{p} \parallel \mathbf{E}^n$ , а при  $\rho_e < \rho_i$   $\mathbf{p} \uparrow \downarrow \mathbf{E}^n$ . То есть при низкой

величине  $\rho_i$  объекта по сравнению с  $\rho_e$  направление момента  $\mathbf{p}$  совпадает с направлением  $\mathbf{E}^n$  в малой области  $V_i$ , а при высоком  $\rho_i$  по сравнению с  $\rho_e$  направления  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{E}^n$  взаимно противоположны.

Рассмотрим примеры того, как эти представления можно применить в методах сопротивлений электроразведки. Начнём с простейшего случая. Пусть заданным возбудителем стационарного электрического поля  $\mathbf{E}$  является точечный токовый электрод с эмиссией  $I$  расположенный в точке  $T$  (рис. 2, а) на поверхности однородного проводящего полупространства  $z \geq 0$  с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_e$ . Декартовы координаты точки  $T$ :  $x_T, y_T=0, z_T=0$ ). Измеряемой величиной является потенциал



**Рис. 2.** Линии  $AB$  и  $MN$  на поверхности проводящего полупространства (а) и генераторная и измерительная антенны в однородной среде (б)

$U(r)$  поля  $\mathbf{E}$  в точке  $r(x_r, 0, 0)$ . Получим выражения, определяющие относительные "вклады" в потенциал  $U(r)$  имеющих изометричную форму малых объектов  $V_i$  с центрами в произвольных точках  $a(x, y, z > 0)$  и с удельными электрическими сопротивлениями  $\rho_i$ , отличающимися от  $\rho_e$ .

При  $\mathbf{E} = -\text{grad } U$  потенциал  $U$  в точках  $a$  определяет выражение:

$$U(a) = \frac{e_T}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho_e I}{2\pi R}, \quad (2)$$

где  $e_T = 2\epsilon_0 \cdot \rho_e \cdot I$  – заряд точечного токового электрода, расположенного на поверхности однородного проводящего полупространства с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_e$ . Принимая во внимание, что  $R = \sqrt{(x - x_T)^2 + y^2 + z^2}$ ,  $E_x(a) = -\partial U(a)/\partial x$ ,  $E_y(a) = -\partial U(a)/\partial y$ ,  $E_z(a) = -\partial U(a)/\partial z$  в соответствии с (1), (2) для скалярных компонент моментов диполей получаем:

$$p_x(a) = D \frac{x - x_T}{R^3}, \quad p_y(a) = D \frac{y}{R^3}, \quad p_z(a) = D \frac{z}{R^3}, \quad (3)$$

где  $D = \frac{\rho_e I \cdot F}{2\pi}$ , а определение множителя  $F$  есть в выражении (1). На **рис. 2, а**

показаны направления векторных компонент  $\mathbf{E}_x^{\Pi}(a)$  и  $\mathbf{E}_z^{\Pi}(a)$  поля  $\mathbf{E}^{\Pi}(a)$  для случая, когда скалярные компоненты  $E_x(a)$  и  $E_z(a)$  положительны и направления векторных компонент  $\mathbf{p}_x(a)$ ,  $\mathbf{p}_z(a)$  при положительном значении множителя  $D$  в выражении (3).

Потенциал  $U(r)$  поля  $\mathbf{E}$  в точке  $r$  (см. **рис. 2, а**), создаваемого постоянным электрическим диполем с моментом  $\mathbf{p}$  и с центром в точке  $a$ , определяет равенство:  $U(r) = G \frac{(\mathbf{p} \mathbf{L})}{L^3}$ , где  $G = 1/(4\pi\epsilon_0)$ , а радиус-вектор  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{ar}$ . Так как согласно (3)  $\mathbf{p} = \mathbf{1}_x \cdot p_x + \mathbf{1}_y \cdot p_y + \mathbf{1}_z \cdot p_z$  удобно представить выражение для потенциала  $U(r)$  в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} U(r) &= U^{px}(r) + U^{py}(r) + U^{pz}(r), \\ U^{px}(r) &= G \cdot p_x \frac{x_r - x}{L^3}, \quad U^{py}(r) = G \cdot p_y \frac{-y}{L^3}, \quad U^{pz}(r) = G \cdot p_z \frac{-z}{L^3}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $L = \sqrt{(x_r - x)^2 + y^2 + z^2}$ . Равенства (3), (4) характеризуют "вклад" нарушения однородности среды в малой области  $V_i$  с центром в точке  $a(x, y, z)$  для 2-х-электродной электроразведочной установки  $AM(Tr)$ , расположенной на поверхности проводящего полупространства, с точечными питающим и измерительным электродами, лежащими на оси  $X$  в точках  $T$  и  $r$  (см. **рис. 2, а**).

Получим теперь выражения, характеризующие "вклад" нарушения однородности среды в объекте  $V_i$  для случая, когда заданным источником стационарного поля является лежащая на оси  $X$ , на поверхности проводящего полупространства с удельным электрическим сопротивлением  $\rho = \rho_e$ , линия  $AB$  постоянного электрического тока  $I$  (или точечные электроды  $A, B$  с эмиссиями

$\pm I$ ). Измеряемой величиной является напряжение  $\mathcal{E}_{MN}$  поля  $\mathbf{E}$  в лежащей на оси  $X$  измерительной линии  $MN$  (см. **рис. 2, а**). Для напряжения  $\mathcal{E}_{MN}$  стационарного электрического поля  $\mathbf{E}$  имеем:  $\mathcal{E}_{MN}=U_M-U_N$ . Этими выражениями для скалярных полей  $U_M, U_N$  можно было бы воспользоваться, но мы при определении напряжения  $\mathcal{E}_{MN}$  применим подход, который справедлив не только для стационарного, но и для переменного (и не потенциального) поля  $\mathbf{E}$ .

Принадлежащий линии  $AB$  элементарный отрезок  $dx_T$  (с центром в точке  $T$ ) идентичен электрическому диполю с моментом  $\mathbf{p}_T=\mathbf{1}_x \cdot (e_T dz_T)$ , где заряд  $e_T=2\varepsilon_0 \rho_e I$ . Потенциал  $U$  поля  $\mathbf{E}$  такого диполя в точке  $a(x, y, z)$  определяет выражение:

$$U^{p_T}(a) = C_1 \frac{(\mathbf{p}_T \cdot \mathbf{R})}{R^3} = C_1 \cdot p_T \frac{x - x_T}{\left[ (x - x_T)^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}}, \quad C_1 = 1/(2\pi\varepsilon_0). \quad (5)$$

Дифференцируя потенциал  $U(a)$  по координатам  $x, y, z$  точки  $a$ , получаем выражения для компонент поля  $\mathbf{E}$  диполя с моментом  $\mathbf{p}_T$  в точке  $a$ :

$$E_x^{p_T}(a) = C_1 \cdot p_T \frac{2(x - x_T)^2 - y^2 - z^2}{R^5}, \quad E_y^{p_T}(a) = C_1 \cdot p_T \frac{3(x - x_T)y}{R^5},$$

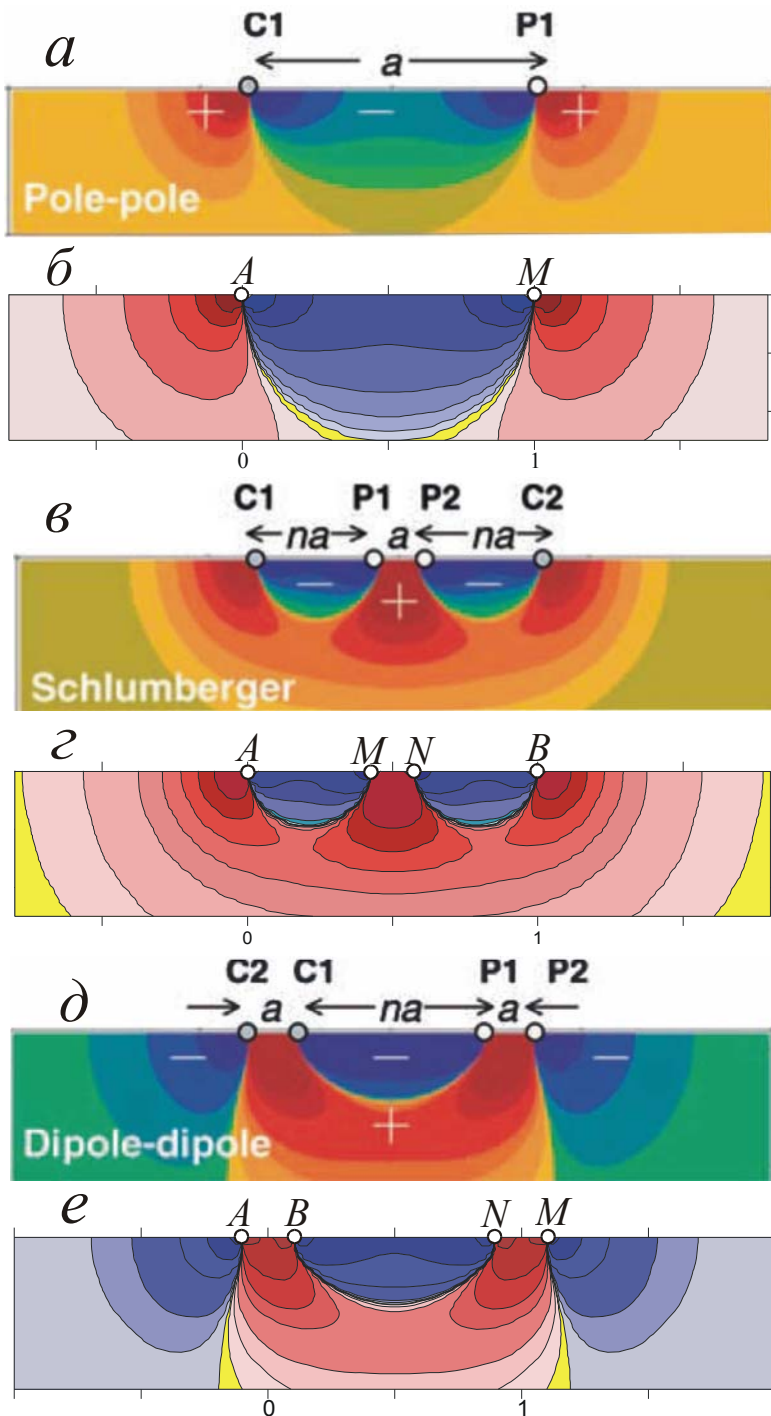
$$E_z^{p_T}(a) = C_1 \cdot p_T \frac{3(x - x_T)z}{R^5}.$$

Далее не сложно (путём численного интегрирования) определить компоненты поля  $\mathbf{E}$  в точке  $a$ , создаваемого линией  $AB$  тока  $I$ :  $E_{x,y,z}^{AB}(a) = \int_{x_B}^{x_A} E_{x,y,z}^{p_T}(a)$  и соответствующие дипольные моменты малых областей  $V_i$  с центрами в точках  $a$ :  $p_{x,y,z}^{AB}(a) = F \cdot E_{x,y,z}^{AB}(a)$ , где множитель  $F$  определяет одно из равенств в (1).

Теперь на основе выражений, аналогичных (4), не сложно вычислить в точке  $r$ , лежащей на линии  $MN$  (см. **рис. 2, а**), потенциалы  $U^{px}(r), U^{py}(r), U^{pz}(r)$ , полей  $\mathbf{E}(r)$ , создаваемых диполями соответственно с моментами  $\mathbf{1}_x p_x^{AB}(a), \mathbf{1}_y p_y^{AB}(a), \mathbf{1}_z p_z^{AB}(a)$ , и потенциал  $U(r)=U^{px}(r)+U^{py}(r)+U^{pz}(r)$ . Понятно, что при известном потенциале  $U(r)$  можем определить компоненту  $E_x(r)=-\partial U(r)/\partial x$  и напряжение поля  $\mathbf{E}$  в лежащей на оси  $X$  измерительной линии  $MN$ :  $\mathcal{E}_{MN} = \int_{x_N}^{x_M} E_x(r) dx_r$ .

## 1.2. Примеры моделирования для оценки областей пространства, оказывающей влияние на установки метода сопротивлений

На **рис. 3** сопоставлены данные расчётов, представленных в работе [Dahlin, Zhou, 2004] (**рис. 3, а, в, д**) и полученные нами результаты расчётов при применении описанного выше подхода (**рис. 3, б, г, е**). Приведенные результаты моделирования отвечают случаю, когда точки  $a$  – центры малых областей  $V_i$  с центрами в плоскости  $y=0$  (лежат в плоскости чертежа на **рис. 2, а**). Заметим, что, судя по показанному на **рис. 3, а, в, д** знаку "вкладов" областей  $V_i$  в измеряемую величину, в работе [Dahlin, Zhou, 2004] результаты расчётов на **рис. 3, а, в, д** соответствуют случаю, когда удельное электрическое сопротивление объекта  $V_i$



**Рис. 3.** Сравнение результатов моделирования, иллюстрирующих вклады элементов  $V_i$  среды в результаты измерений, для некоторых установок метода сопротивлений

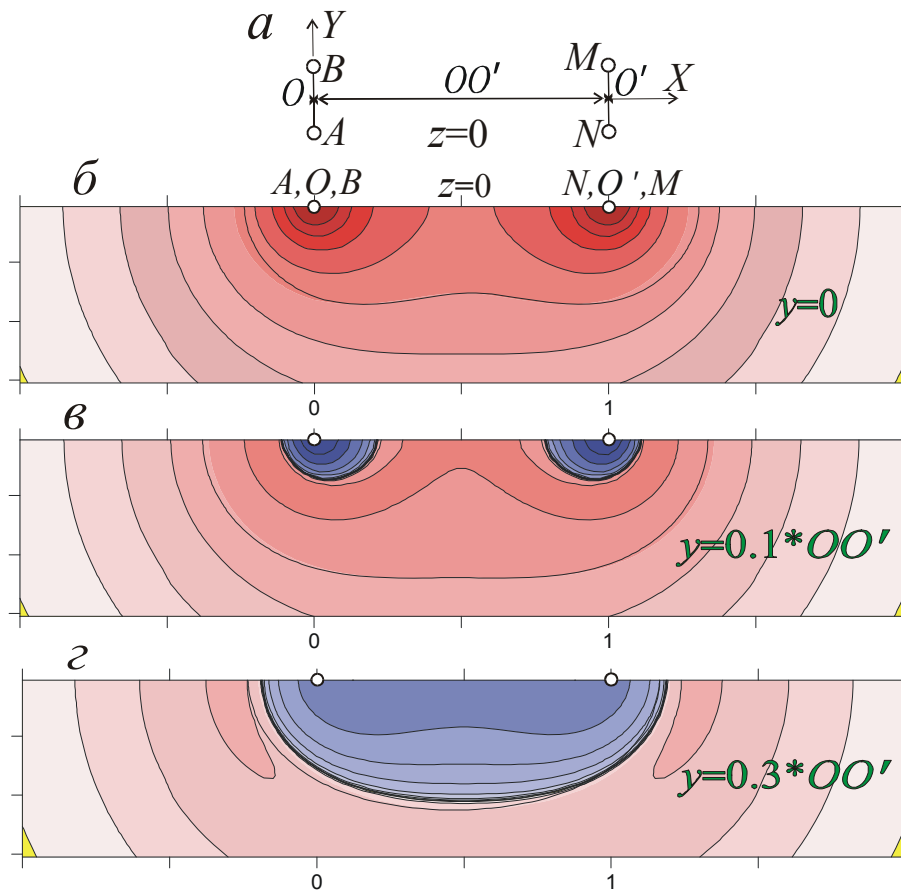
электроды расположены на одной прямой. Но предлагаемый нами подход, конечно, может быть применён и для других установок.

На рис. 4 приведен пример моделирования, характеризующий влияние малых объектов  $V_i$  на результаты измерений с дипольно-экваториальной установкой метода сопротивлений. На рис. 4, б, в, г показано влияние на напряжение  $\mathcal{E}_{MN}$  объектов  $V_i$  с центрами в трёх плоскостях  $y=\text{const}$ , ортогональных направлениям

выше, чем у вмещающей среды ( $\rho_i > \rho_e$ ). Поэтому при наших расчётах, результаты которых показаны на рис. 3, б, г, е, было выбрано отрицательное значение множителя  $F$  в выражении (1).

При сравнении результатов расчётов на рис. 3, а, 3, б (двухэлектродная установка  $AM$ ), на рис. 3, в, 3, г (установка Шлюмберже  $AMNB$ ) и на рис. 3, д, 3, е (дипольно-осевая установка  $ABNM$ ) видна полная идентичность опубликованных в работе [Dahlin, Zhou, 2004] и полученных нами результатов моделирования. Некоторые отличия проявляются только в выборе сечения изолиний и в оттенках "цветовой гаммы" на этих рисунках. Представленные результаты моделирования показывают, что предлагаемый нами подход для стационарного электрического поля даёт те же результаты, что и при другой методике расчётов, применённой в работе [Dahlin, Zhou, 2004].

Результаты расчётов, приведенные на рис. 3, получены для линейных установок методов сопротивления, когда все токовые и измерительные



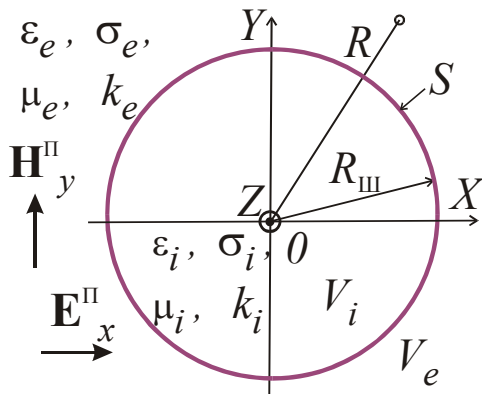
**Рис. 4.** Результаты моделирования для дипольно-экваториальной установки (ДЭУ) метода сопротивлений.  $AB=MN=0.02 \cdot OO'$

токовой и измерительной линий (см. рис. 4, а). На этом рисунке  $OO'$  – расстояние между центрами токового диполя  $AB$  и измерительного диполя  $MN$ . Результаты моделирования показаны для плоскостей  $y=0$ ,  $y=0.1 \cdot OO'$  и  $y=0.3 \cdot OO'$ .

Приведенные на рис. 3, 4 результаты моделирования показывают лишь то, какое (относительное) влияние может оказывать наличие в среде малого по размерам и имеющего изометричную форму объекта  $V_i$ , отличающегося по удельному электрическому сопротивлению от вмещающей его среды, на результаты измерений с той или иной электроразведочной установкой. Эти результаты иллюстрируют только то, как (при заданном отношении  $\rho_i/\rho_e$ ) зависит влияние этого малого объекта от положения его центра относительно токовых и измерительных электродов. Но на основе подобного подхода нами были разработаны алгоритмы численных расчетов для определения влияния имеющих малые, либо иные размеры объектов  $V_0$  различной формы, на результаты измерений, см. раздел 2.4. Понятно, что дипольные моменты множества малых элементов  $V_i$ , из которых состоят такие объекты  $V_0$ , фактически зависят не от первичного, а от суммарного поля. Поэтому расчёты с целью определения влияния таких, имеющих не малые размеры, объектов на результаты измерений с различными установками метода сопротивлений потребовали применения итерационного подхода.

### 1.3. Влияние малого объекта изометричной формы на гармонически меняющееся ЭМ поле

Пусть теперь объект в форме шара, отличающийся по удельной электропроводности  $\sigma$ , диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  или магнитной проницаемости  $\mu$  от соответствующих параметров вмещающей среды, находится в однородном гармонически меняющемся первичном ЭМ поле. Под первичным ЭМ полем (с напряжённостью электрического поля  $\mathbf{E}^n$  и напряжённостью магнитного поля  $\mathbf{H}^n$ ) здесь понимаем поле в безграничной однородной среде с электромагнитными параметрами  $\sigma_e, \varepsilon_e, \mu_e$  и волновым числом  $k_e$ . Решение подобной задачи в более общей постановке приведено в монографии Б. С. Светова [Светов, 2008]. В этой работе приведено решение уравнения Гельмгольца для потенциалов Дебая. Решение представлено в виде суммы сферических волновых функций, содержащих присоединённые функции Лежандра и сферические функции Бесселя. Но так как здесь нам нужно получить лишь приближённое



**Рис. 5.** Объект  $V_i$  в форме шара в однородном первичном линейно-поляризованном ЭМ поле

решение для оценки влияния на ЭМ поле изометричного объекта  $V_i$  малых размеров, то можем полагать, что в пределах объекта  $V_i$  первичное ЭМ поле однородно и в этом случае применить более простой подход.

Приведём приближённое решение прямой задачи для объекта в форме шара при однородности линейно поляризованного первичного ЭМ поля (рис. 5). Выберем такие направления осей  $X, Y$  декартовых координат, чтобы для полей  $\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^n$  (при применении комплексной записи) были справедливы выражения:  $\mathbf{E}^n = \mathbf{1}_x \cdot E_x^n, E_x^n = E_0 \cdot \exp(-i\omega t), \mathbf{H}^n = \mathbf{1}_y \cdot H_y^n, H_y^n = H_0 \cdot \exp(-i\omega t)$ , где  $E_0, H_0$  –

комплексные амплитуды компонент  $E_x^n, H_y^n, \omega$  – круговая частота,  $t$  – время,  $i$  – мнимая единица.

Для определения ЭМ поля с составляющими  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  воспользуемся электродинамическими потенциалами электрического типа ( $\mathbf{A}$ ) и магнитного типа ( $\mathbf{A}^*$ ) (см. [Альпин и др., 2020, б]), которые в однородных по электромагнитным параметрам областях пространства и при соответствующих условиях калибровки связаны с ЭМ полем равенствами:

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = i\omega \left( \mathbf{A} + \frac{1}{k^2} \text{grad div } \mathbf{A} \right);$$

$$\mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{A}^*, \quad \mathbf{H} = \sigma' \left( \mathbf{A}^* + \frac{1}{k^2} \text{grad div } \mathbf{A}^* \right),$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная,  $\mathbf{B}$  – вектор магнитной индукции, а в областях пространства  $V_{i,e}$  магнитные проницаемость  $\mu = \mu_{i,e}$ , волновые числа

$k=k_{i,e} = \sqrt{i\omega\mu_0\mu_{i,e}\sigma'_{i,e}}$ , комплексные удельные электропроводности  $\sigma'=\sigma'_{i,e} = \sigma_{i,e} - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{i,e}$ , удельные электропроводности  $\sigma=\sigma_{i,e}$ , диэлектрические проницаемости  $\varepsilon=\varepsilon_{i,e}$ , а  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная. В однородных по электромагнитным параметрам  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  областях пространства при отсутствии там сторонних токов потенциалы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^*$  удовлетворяют однородным уравнениям Гельмгольца:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_{i,e} + k_{i,e}^2 \mathbf{A}_{i,e} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{A}_{i,e}^* + k_{i,e}^2 \mathbf{A}_{i,e}^* = 0.$$

Будем искать решения этих уравнений в виде сумм векторных потенциалов первичного поля и (обусловленного нарушением однородности среды) вторичного поля:  $\mathbf{A}_{i,e} = \mathbf{A}^{\Pi} + \mathbf{A}_{i,e}^{\text{B}}$ ,  $\mathbf{A}_{i,e}^* = \mathbf{A}^{*\Pi} + \mathbf{A}_{i,e}^{*\text{B}}$ . При указанных выше условиях потенциалы первичного ЭМ поля определяют выражения:  $\mathbf{A}^{\Pi} = \mathbf{1}_x \cdot A_x^{\Pi}$ ,  $A_x^{\Pi} = \frac{1}{i\omega} E_x^{\Pi}$ ,

$\mathbf{A}^{*\Pi} = \mathbf{1}_y \cdot A_y^{*\Pi}$ ,  $A_y^{*\Pi} = \frac{1}{\sigma'_e} H_y^{\Pi}$ . Предположим, что вторичное ЭМ поле может быть

выражено через потенциалы  $\mathbf{A}^{\text{B}} = \mathbf{1}_x \cdot A_x^{\text{B}}$ ,  $\mathbf{A}^{*\text{B}} = \mathbf{1}_y \cdot A_y^{*\text{B}}$  с теми же декартовыми компонентами, что у потенциалов первичного поля. Скалярные компоненты  $A_x^{\text{B}}$ ,  $A_y^{*\text{B}}$  векторных потенциалов в областях  $V_{i,e}$  должны удовлетворять уравнениям Гельмгольца, условиям в бесконечности, а также граничным условиям на особой поверхности  $S$  (см. рис. 5), обеспечивающим непрерывность соответствующих компонент ЭМ поля на границе объекта  $V_i$  с вмещающей его средой.

Нами получены решения для компонент  $A_x^{\text{B}}$ ,  $A_y^{*\text{B}}$ , которые, по-видимому, являются приближёнными из-за того, что был применён не классический для электродинамики (хотя и не противоречащий поверхностным формам уравнений ЭМ поля) подход к применению граничных условий. Согласно этим решениям в областях пространства  $V_{i,e}$  компоненты  $A_{x\ i,e}^{\text{B}}$ ,  $A_{y\ i,e}^{*\text{B}}$  определяют следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} A_{x\ i}^{\text{B}} &= C_{\text{Э}} A_x^{\Pi}, \quad A_{x\ e}^{\text{B}} = D_{\text{Э}} \frac{\exp(ik_e R)}{R}, \quad C_{\text{Э}} \approx -\frac{\sigma'_i - \sigma'_e}{\sigma'_i + 2\sigma'_e}, \quad D_{\text{Э}} \approx \mu_0 \sigma'_e \frac{\sigma'_i - \sigma'_e}{\sigma'_i + 2\sigma'_e} R_{\text{ш}}^3 E_x^{\Pi}, \\ A_{y\ i}^{*\text{B}} &= C_{\text{М}} A_y^{*\Pi}, \quad A_{y\ e}^{*\text{B}} = D_{\text{М}} \frac{\exp(ik_e R)}{R}, \quad C_{\text{М}} \approx -\frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e}, \quad D_{\text{М}} \approx i\omega\mu_0\mu_e \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} R_{\text{ш}}^3 H_y^{\Pi}, \end{aligned} \right\} (6)$$

где  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , а приближённые выражения для коэффициентов  $C_{\text{Э}}$ ,  $D_{\text{Э}}$ ,  $C_{\text{М}}$ ,  $D_{\text{М}}$  получены при условии, что размер  $R_{\text{ш}}$  достаточно мал для того, чтобы было справедливо неравенство  $|k_e| \cdot R_{\text{ш}} \ll 1$ .

Из выражений (6) для компонент  $A_{x\ e}^{\text{B}}$ ,  $A_{y\ e}^{*\text{B}}$  векторных электродинамических потенциалов следует, в частности, то, что при указанных выше условиях в области  $V_e$  вторичное ЭМ поле идентично полю двух расположенных в центре  $O$  объекта в форме шара переменных диполей: электрического диполя с моментом  $\mathbf{p}$  коллинеарным направлению поля  $\mathbf{E}^{\Pi} = \mathbf{1}_x \cdot E_x^{\Pi}$  и магнитного диполя с моментом  $\mathbf{M}$

коллинеарным направлению поля  $\mathbf{H}^{\text{п}} = \mathbf{1}_y \cdot H_y^{\text{п}}$ . Понятно, что в немагнитной среде (при  $\mu_i = \mu_e = 1$ ) имеем  $C_M = 0$ ,  $D_M = 0$  и  $\mathbf{M} = 0$ .

При возбуждении ЭМ поля в безграничной однородной среде (с электромагнитными параметрами области  $V_e$ ) переменным электрическим диполем – элементарным отрезком  $dl_x$  стороннего тока  $I = I_0 \cdot \exp(-i\omega t)$  с центром, расположенным в начале координат, для ненулевой компоненты вектора  $\mathbf{A}$  в совмещённой системе декартовых и сферических координат с полярной осью по оси  $X$  имеем:

$$\mathbf{A}^{\text{одн}} = \mathbf{1}_x A_x^{\text{одн}}, \quad A_x^{\text{одн}} = \frac{I dl_x \exp(ik_e R)}{4\pi R} = \frac{p_x \exp(ik_e R)}{4\pi \varepsilon_0 \sigma'_e R}.$$

Момент такого электрического диполя  $\mathbf{p} = \mathbf{1}_x p_x$ ,  $p_x = e \cdot dl_x = \frac{\varepsilon_0 \cdot I \cdot dl_x}{\sigma'_e}$ , где  $\pm e = \frac{\pm \varepsilon_0 I}{\sigma'_e}$  – точечные электрические заряды на концах отрезка  $dl_x$  стороннего тока  $I$  (см. [Альпин и др., 2020, б]). При сравнении этого равенства для  $A_x^{\text{одн}}$  с выражением для  $A_x^{\text{в}}$  в (6) мы видим, что (обусловленная присутствием в области пространства  $V_i$  шара, с иными, чем у вмещающей среды, параметрами  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$ ) составляющая вторичного ЭМ поля в области  $V_e$  идентична полю переменного электрического диполя с моментом

$$\mathbf{p} = \mathbf{1}_x p_x, \quad p_x \approx 3\varepsilon_0 \frac{\sigma'_i - \sigma'_e}{\sigma'_i + 2\sigma'_e} E_x^{\text{п}} \cdot v_i = 3\varepsilon_0 \frac{(\sigma'_i / \sigma'_e) - 1}{(\sigma'_i / \sigma'_e) + 2} E_x^{\text{п}} \cdot v_i, \quad (7)$$

где  $v_i = (4\pi/3)R_{\text{ш}}^3$  – объём занимаемый малой областью  $V_i$ . Заметим, что различие фаз компонент  $p_x$  и  $E_x^{\text{п}}$  зависит от аргумента комплексной величины  $(\sigma'_i - \sigma'_e) / (\sigma'_i + 2\sigma'_e)$ .

Из выражений (6) следует, что если объект в области  $V_i$  в форме шара отличается от вмещающей его среды магнитной проницаемостью, то обусловленная этим составляющая вторичного ЭМ поля в области  $V_e$  аналогична полю расположенного в центре шара переменного магнитного диполя с моментом  $\mathbf{M} = \mathbf{1}_y \cdot M_y$ . Для этого диполя в однородной среде с электромагнитными параметрами области  $V_e$  для ненулевой компоненты  $A_y^{*\text{одн}}$  справедливо

выражение:  $A_y^{*\text{одн}} = \frac{i\omega\mu_0\mu_e M_y \exp(ik_e R)}{4\pi R}$  (см. [Альпин и др., 2020, б]). При

сравнении этого равенства с выражением для  $A_y^{*\text{в}}$  в (6) получаем:

$$M_y = 4\pi \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} R_{\text{ш}}^3 H_y^{\text{п}} \quad \text{или} \quad M_y = 3 \cdot \frac{(\mu_i / \mu_e) - 1}{(\mu_i / \mu_e) + 2} \cdot H_y^{\text{п}} \cdot v_i. \quad \text{При } \mu_i > \mu_e \text{ компоненты}$$

$M_y$  и  $H_y^{\text{п}}$  меняются синфазно, а при  $\mu_i < \mu_e$  – в противофазе.

Конечно, если объект в области  $V_i$  имеет не форму шара, а иную (изометричную) форму, то при достаточно большом расстоянии от этого объекта до точек наблюдения приведенные выше приближённые выражения для



компонент  $p_x$  и  $M_y$ , в правые части которых входит объём  $v_i$ , объекта в области  $V_i$  остаются справедливыми, конечно, с некоторой погрешностью. Далее в этой работе ограничимся случаем немагнитной среды и при этом условии во всех областях среды магнитные моменты  $\mathbf{M}=0$ .

#### 1.4. Влияние малых объектов $V_i$ на напряжение в измерительной антенне переменного электрического поля, возбуждаемого генераторной антенной

Пусть сторонним возбудителем гармонически меняющегося с частотой  $f$  ЭМ поля служит расположенная в безграничной однородной среде с ЭМ параметрами  $\sigma=\sigma_e$ ,  $\varepsilon=\varepsilon_e$ ,  $\mu=\mu_e=1$  линия  $AB$  стороннего тока  $I$  (генераторная антенна  $T$  электрического типа), а измеряемая величина – напряжение электрического поля в (параллельной  $AB$ ) линии  $MN$  (приёмной антенне  $r$  электрического типа), см. **рис. 2, б**. Получим выражения для оценки "вкладов" в напряжение в этой антенне нарушений однородности среды по электрическим параметрам в малых областях  $V_i$  изометричной формы с электромагнитными параметрами  $\sigma=\sigma_i$ ,  $\varepsilon=\varepsilon_i$ ,  $\mu=\mu_i=1$  и с центрами в точках  $a$ .

Согласно (6), (7), в немагнитной среде при направлении первичного электрического поля по линии  $l$  ( $\mathbf{E}^n=\mathbf{1}_l \cdot E_l^n$ ) вторичное поле, обусловленное нарушением однородности среды в малом элементе  $V_i$  вне  $V_i$  и в отсутствие других объектов подобно полю переменного электрического диполя с центром в "центре"  $a$  элемента  $V_i$  и с моментом  $\mathbf{p}=\mathbf{1}_l p_l$ , где  $p_l \approx 3\varepsilon_0 \frac{(\sigma'_i/\sigma'_e)-1}{(\sigma'_i/\sigma'_e)+2} E_l^n \cdot v_i$ .

Понятно, что векторы  $\mathbf{E}^n$  и  $\mathbf{p}$  в каждой точке  $a$  можем представить как суммы:

$$\mathbf{E}^n = \mathbf{1}_x E_x^n + \mathbf{1}_y E_y^n + \mathbf{1}_z E_z^n, \quad \mathbf{p} = \mathbf{1}_x p_x + \mathbf{1}_y p_y + \mathbf{1}_z p_z, \quad \text{где, например,}$$

$$E_x^n = E_l^n \cos(\mathbf{1}_l, \mathbf{1}_x), \quad p_x \approx 3\varepsilon_0 \frac{(\sigma'_i/\sigma'_e)-1}{(\sigma'_i/\sigma'_e)+2} E_x^n \cdot v_i. \quad \text{Возможные направления}$$

векторных компонент  $\mathbf{E}_x^n$ ,  $\mathbf{E}_z^n$  и компонент  $p_x$ ,  $p_z$  в некоторый момент времени  $t$  показаны на **рис. 2, б**.

Если сторонним возбудителем первичного ЭМ поля служит лежащая на оси  $Z$  декартовых координат линии  $AB$  гармонически меняющегося тока  $I$ , а  $z_B \leq z_T \leq z_A$  (см. **рис. 2, б**), то векторный потенциал  $\mathbf{A}^n$  первичного ЭМ поля в точке  $a$  с координатами  $x, y, z$  определяют выражения:

$$\mathbf{A}^n(a) = \mathbf{1}_z A_z^n(a), \quad A_z^n(a) = \int_{z_B}^{z_A} dA_z^n(a), \quad dA_z^n(a) = \frac{I \exp(ik_e R)}{4\pi R} dz_T,$$

где  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_T)^2}$ . Компоненты электрической составляющей первичного ЭМ поля в точке  $a$  можем определить, пользуясь выражениями:

$$E_x^n(a) = \frac{i\omega}{k_e^2} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{A}^n(a), \quad E_y^n(a) = \frac{i\omega}{k_e^2} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathbf{A}^n(a), \quad E_z^n(a) = i\omega \left( A_z^n(a) + \frac{1}{k_e^2} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{A}^n(a) \right).$$

Согласно (7) влияние нарушения однородности среды по электрическим параметрам в малой области  $V_i$  приведёт к тому, что вне  $V_i$  вторичное ЭМ поле будет подобно полю переменного электрического диполя с моментом  $\mathbf{p}(a) = F \cdot \mathbf{E}^{\text{п}}(a)$ , где  $F \approx 3\varepsilon_0 \frac{\sigma'_i - \sigma'_e}{\sigma'_i + 2\sigma'_e} \cdot v_i$ . Скалярные компоненты момента  $\mathbf{p}(a)$

диполя по осям  $X, Y, Z$  определяют выражения вида:  $p_{x,y,z}(a) = F \cdot E_{x,y,z}^{\text{п}}(a)$ . Для векторных потенциалов  $\mathbf{A}^{x,y,z}(r)$  электрического типа, характеризующих ЭМ поле электрических диполей с моментами  $\mathbf{p}_{x,y,z}(a)$  в произвольной точке  $r$  с координатами  $x_r, y_r, z_r$ , справедливы выражения:

$$\mathbf{A}^{x,y,z}(r) = \frac{\mathbf{p}_{x,y,z}(a) \exp(ik_e L)}{4\pi\varepsilon_0\sigma'_e L}, \quad \text{где} \quad L = \sqrt{(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2 + (z_r - z)^2} \quad (\text{см. рис. 2, б}).$$

Соответственно скалярные декартовы компоненты электрического поля

$$E_z^{x,y,z}(r) = i\omega \left( A_z^{x,y,z}(r) + \frac{1}{k_e^2} \frac{\partial}{\partial z_r} \text{div} \mathbf{A}^{x,y,z}(r) \right)$$

Чтобы определить напряжение  $\mathcal{E}_{MN}$  электрического поля в (параллельной оси  $Z$ ) измерительной линии  $MN$ , нужно

выполнить численное интегрирование:  $\mathcal{E}_{MN} = \int_{Z_N}^{Z_M} E_z(r) dz_r$ , где

$$E_z(r) = E_z^x(r) + E_z^y(r) + E_z^z(r).$$

### 1.5. Примеры моделирования для оценки области пространства, оказывающей существенное влияние на результаты радиоволнового просвечивания

На рис. 3 было показано то, что в случае стационарного электрического поля полученные результаты расчётов при применённом нами подходе идентичны тем, которые (для такого поля) представлены в работе [Dahlin, Zhou, 2004]. Рассмотрим теперь результаты аналогичного способа расчётов для переменного гармонически меняющегося поля.

Прежде, чем перейти к результатам моделирования, напомним, что некоторые особенности гармонически меняющегося ЭМ поля зависят от частоты  $f$  и электрических параметров среды: удельной электропроводности  $\sigma=1/\rho$  и диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$ . Отношение амплитуд скалярных компонент плотности токов смещения  $\mathbf{j}^{\text{см}} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon \cdot \mathbf{E}$  и плотности токов проводимости  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  по произвольному направлению  $l$ :

$$\alpha = \left| \frac{j_l^{\text{см}}}{j_l} \right| = \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\sigma} = 2\pi f \varepsilon_0 \varepsilon \rho. \quad (8)$$

От отношения  $\alpha$  зависит, в частности, соотношение между длиной волны  $\lambda$  и глубиной проникновения  $\delta$  ЭМ поля (см. [Альпин и др., 2020, б]). Для плоской гармонической ЭМ волны  $\lambda=(2\pi)/a$ ,  $\delta=1/b$ , где фазовая постоянная  $a=\text{Re}(k)$ , коэффициент затухания  $b=\text{Im}(k)$ , а  $k$  – волновое число. Если при  $\sigma \neq 0$  отношение  $\alpha \gg 1$ , то такой проводящей среде в большей степени присущи свойства

диэлектрика, а не проводника (среда – несовершенный диэлектрик). При этих условиях  $\lambda \ll \delta$ . Если же  $\alpha \ll 1$  (квазистационарное гармонически меняющееся поле), то на расстоянии длины волны  $\lambda$  амплитуды компонент плоской гармонической ЭМ волны (по направлению её распространения) уменьшаются в  $\exp(2\pi) \approx 535$  раз. Понятно, что для не плоских ЭМ волн сторонних возбудителей конечных или бесконечно-малых размеров убывание амплитуды колебаний обусловлено не только затуханием волны в проводящей среде, но также и геометрическим расхождением потока ЭМ энергии.

Рассмотрим теперь примеры результатов моделирования на основе описанного выше алгоритма, которые могут быть отнесены к теории межскважинной модификации метода радиоволнового просвечивания (РВП). Понятно что в случае, когда область  $V_e$  – безграничная однородная среда, влияние параметров скважин нами не учитывалось. Результаты моделирования приведены для случая, когда генераторная антенна  $AB$ , измерительная антенна  $MN$ , а также центры  $a$  элементов  $V_i$  лежат в плоскости  $y=0$  (см. [рис. 2, б](#)). Все результаты расчётов, представленные на [рис. 6 - 8](#), получены при следующих параметрах модели. Декартовы координаты центра  $T_0$  генераторной антенны  $AB$  и центра  $r_0$  измерительной антенны  $MN$ :  $x_{T_0}=0, y_{T_0}=0, z_{T_0}=0, x_{r_0}=100$  м,  $y_{r_0}=0, z_{r_0}=0$ , а  $x, y=0, z$  – это координаты центра  $a$  малого элемента  $V_i$ , электрические параметры  $\rho_i, \varepsilon_i$  которого отличаются от параметров  $\rho_e, \varepsilon_e$  вмещающей среды.

При расчётах было принято во внимание следующее. Напряжение первичного электрического поля  $\mathbf{E}^n$ , возбуждаемого генераторной антенной  $AB$ , в измерительной антенне  $MN$  в безграничной однородной среде с параметрами  $\rho_e, \varepsilon_e$

определяет выражение:  $\mathcal{E}_{MN}^n = \int_{z_N}^{z_M} E_z^n(r) dz_r$ , где  $E_z^n(r)$  это  $z$  – компонента поля

$\mathbf{E}^n$  в точках  $r$  отрезка  $MN$ . Амплитуду и начальную этого напряжения обозначим соответственно  $A^n$  и  $\varphi^n$ . Как уже было отмечено, вторичное электрическое поле  $\mathbf{E}^b$  обусловлено нарушением однородности среды в малом объекте  $V_i$  в форме шара с центром в точке  $a$ . Напряжение поля  $\mathbf{E}^b$  в измерительной антенне  $MN$ :

$\mathcal{E}_{MN}^b = \int_{z_N}^{z_M} E_z^b(r) dz_r$ , где  $E_z^b(r)$  – компонента вторичного поля в точках  $r$  антенны

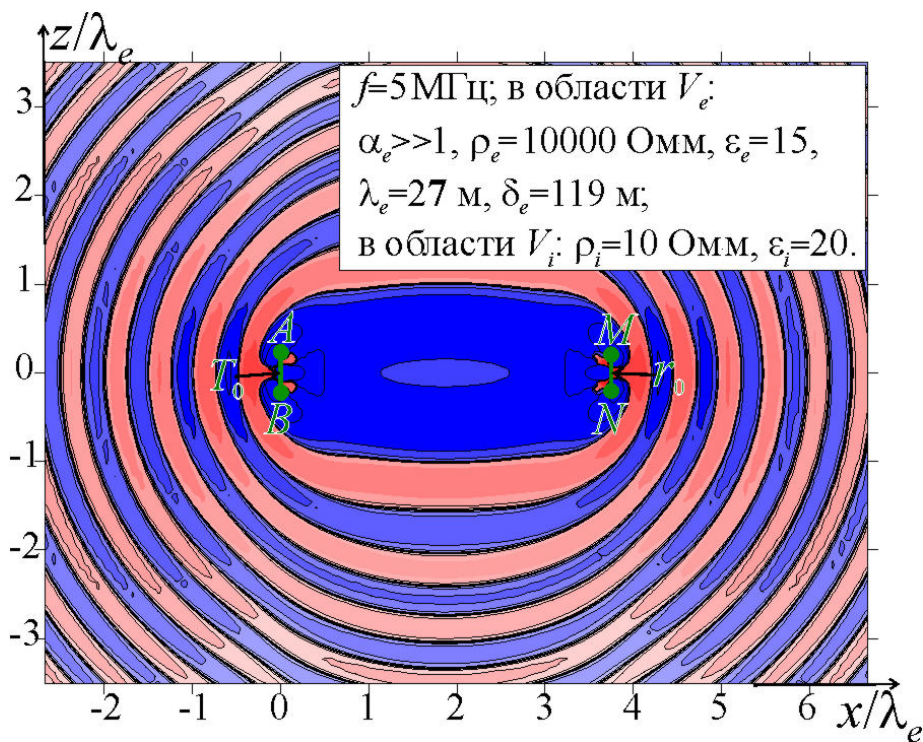
$MN$ . Амплитуду и начальную этого напряжения обозначим соответственно  $A^b$  и  $\varphi^b$ .

Относительные "вклады"  $\Delta$  объектов  $V_i$  в напряжение электрического поля в измерительной антенне мы определяли следующим образом:

$$\Delta = \Delta(x, z) = (A^b / A^n) \cos(\varphi^b - \varphi^n). \quad (9)$$

Понятно, что, в соответствии с (9), при  $\cos(\varphi^b - \varphi^n) > 0$  вторичное электрическое поле увеличивает напряжение  $\mathcal{E}_{MN}$  в антенне  $MN$  по сравнению с  $\mathcal{E}_{MN}^n$ , а при  $\cos(\varphi^b - \varphi^n) < 0$  уменьшает. Этим двум случаям на [рис. 6, 7](#) соответствуют оттенки красного и синего цвета. Координаты  $x, z$  на этих рисунках нормированы на длину  $\lambda_e$  гармонической ЭМ волны в области  $V_e$ .

Примеры результатов моделирования на **рис. 6** получены для случая, когда в области пространства  $V_e$  определяемое в соответствии с (8) отношение  $|j_l^{cm}|/|j_l| \gg 1$ , то есть при заданных частоте  $f$  и параметрах  $\rho_e, \epsilon_e$  среда в области



**Рис. 6.** Относительные вклады  $\Delta$  малых объектов  $V_i$  в напряжение  $\mathcal{E}_{MN}$ .  $AB=MN=1$  м

$AB$  (с центром  $T_0$ ), то есть справедливо неравенство  $L_{Tr} \gg \lambda_e/2\pi$  или  $L_{Tr} \gg 1/|k_e|$ , где  $L_{Tr}$  – расстояние между точками  $T_0$  и  $r_0$ , а  $k_e$  – волновое число в области  $V_e$ .

Представленные на **рис. 6** результаты расчётов получены при  $L_{Tr}=100$  м и  $\lambda_e \approx 27$  м. Может показаться, что показанные на **рис. 6** красным и синим цветами части плоскости  $y=0$  соответствуют сечению этой плоскостью зон Френеля (см. **рис. 1**). Но это не совсем так. Определение (9) понятия "вклада"  $\Delta$  малого объекта  $V_i$  в измеряемое напряжение  $\mathcal{E}_{MN}$  не совпадает с определением понятия "зоны Френеля".

На **рис. 7** приведены результаты расчётов для тех случаев, когда в области  $V_e$  (а также и в области  $V_i$ ) определяемое в соответствии с (8) отношение  $|j_l^{cm}|/|j_l| = \alpha_e \ll 1$ , что отвечает квазистационарному гармонически меняющемуся ЭМ полю. Результаты моделирования на **рис. 7, а** соответствуют случаю, когда измерительная антенна расположена в дальней зоне генераторной антенны. На этом рисунке расстояние  $L_{Tr}$  между центрами этих антенн более, чем в три раза, превышает длину волны  $\lambda_e$  в области  $V_e$ . При этих условиях нам не сложно было получить результаты математического моделирования, но необходимо отметить следующее.

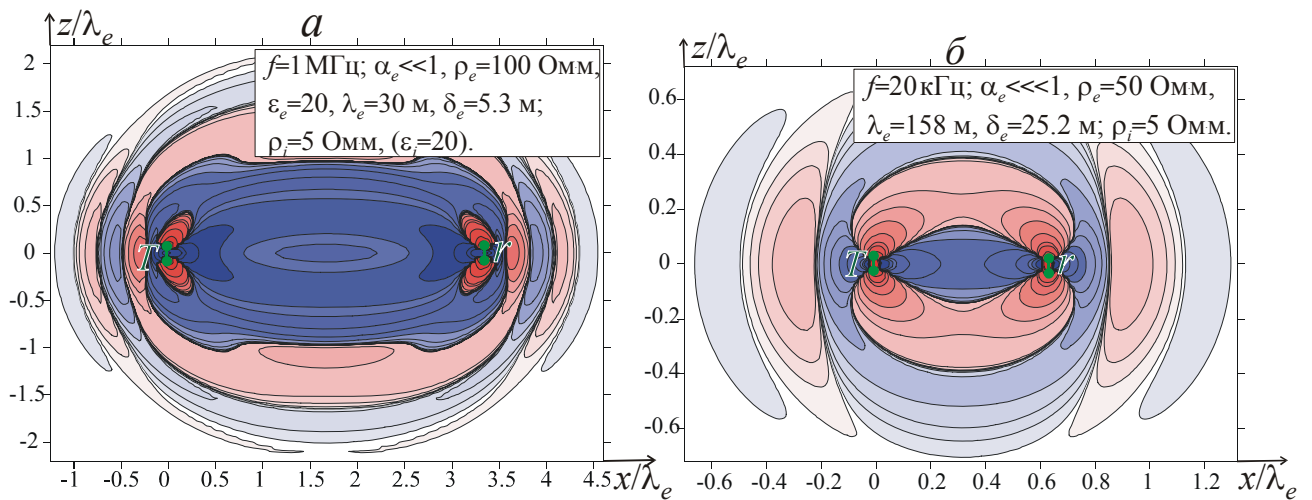
Фактически, при выполнении условия квазистационарности (и в отсутствие влияния границы проводящего и непроводящего полупространств, как в наземных

$V_e$  – несовершенный диэлектрик. При этом глубина проникновения  $\delta_e \gg \lambda_e$  и на расстояниях, значительно превышающих длину волны  $\lambda_e$ , затухание ЭМ поля в области  $V_e$  не очень велико.

Результаты моделирования, показанные на этом рисунке, соответствуют случаю, когда измерительная антенна  $MN$  (с центром  $r_0$ ) расположена в дальней зоне генераторной антенны

методах электроразведки) проводить в РВП измерения характеристик ЭМ поля на расстоянии нескольких длин волн  $\lambda_e$  от стороннего возбудителя поля  $T$  практически невозможно из-за интенсивного затухания квазистационарного поля на расстояниях от его возбудителя, превышающих длину волны. Поэтому представленные на **рис. 7, а** материалы могут быть интересными лишь в теоретическом аспекте.

Иначе обстоит дело с результатами моделирования, показанными на **рис. 7, б**. Здесь расстояние  $L_{Tr} \approx 0.63 \cdot \lambda_e$ , то есть измерительная антенна находится в промежуточной зоне генераторной антенны. При сравнении результатов моделирования на **рис. 7, а** и на **рис. 7, б** видно, что во втором случае



**Рис. 7.** Относительные вклады  $\Delta$  малых объектов  $V_i$  в напряжение  $\mathcal{E}_{MN}$

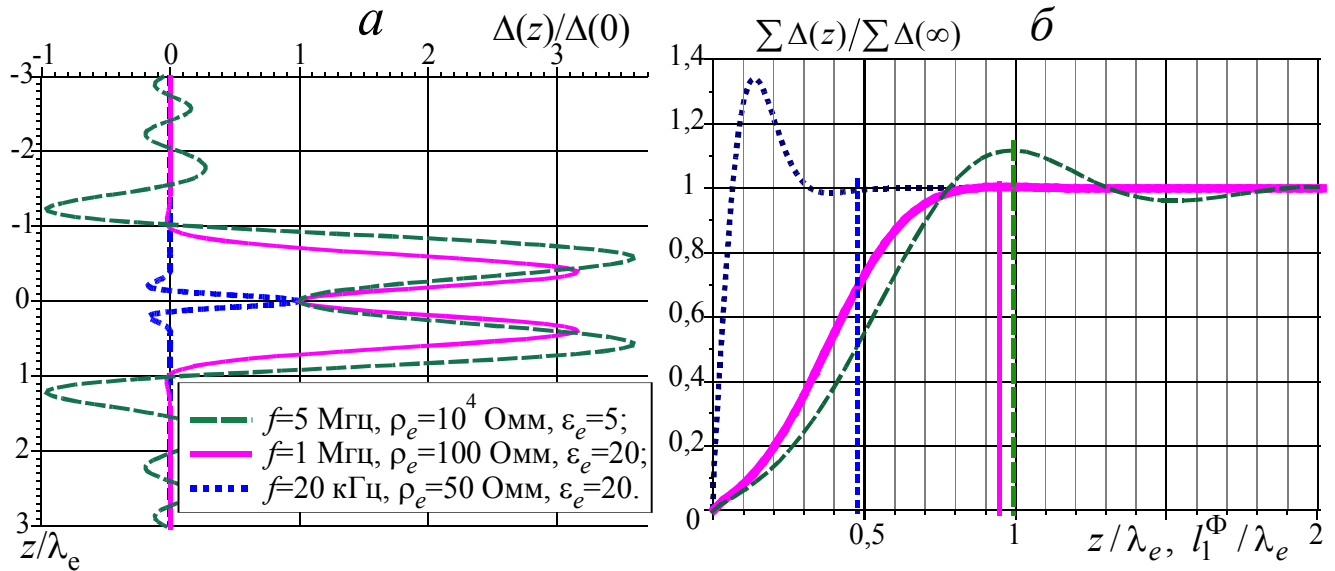
(нормированные на длину волны  $\lambda_e$ ) поперечные размеры области, оказывающей существенное влияние на результаты измерений, значительно меньше, чем в первом случае. Это подтверждают и результаты расчётов, приведенные на **рис. 8** (см. ниже). Отметим ещё, что для случая, когда отношение  $|j_l^{cm}|/|j_l|=\alpha_e$  соизмеримо с единицей, подобные представленным на **рис. 6, 7** результаты моделирования приведены в статье [Каринский, Кузнецов, 2019].

Результаты моделирования на **рис. 6, рис. 7**, показывают зависимость определённых на основе выражения (9) относительных вкладов  $\Delta$  объектов  $V_i$  на качественном уровне. Иллюстрацией примера количественной оценки таких вкладов служат результаты расчётов на следующем рисунке.

На **рис. 8, а** приведены зависимости вкладов  $\Delta$  от нормированной на длину волны  $\lambda_e$  координаты  $z$  центра  $a$  малого объекта  $V_i$ . Центр этот расположен на одинаковых расстояниях от генераторной и измерительной антенн в плоскости  $y=0$ . То есть координаты  $x=0.5 \cdot x_r$ ,  $y=0$  и  $z_r=z_T=0$  (см. **рис. 2, б**). Вклады  $\Delta(z)$  нормированы на величину  $\Delta(0)$  (при  $z=0$ ). В приведенных примерах  $\Delta(0)$  это вклад малого объекта  $V_i^0$ , центр которого расположен посередине между (находящимися на одной "высоте") центрами генераторной и измерительной антенн. Показанные на **рис. 8** штриховой, сплошной и пунктирной линиями кривые получены при тех же расстояниях, частотах и электрических параметрах среды, что и результаты

моделирования соответственно на **рис. 6**, **рис. 7, а** (дальняя зона) и **рис. 7, б** (промежуточная зона).

На **рис. 8, а** видим, что отношение  $\Delta(z)/\Delta(0)$  при  $z=0$  может быть не максимальным по сравнению с остальными величинами  $\Delta(z)/\Delta(0)$ . То есть вклады  $\Delta(z)$  некоторых малых объектов  $V_i$  в напряжение  $\mathcal{E}_{MN}$  могут быть (по абсолютной



**Рис. 8.** Зависимости от  $z/\lambda_e$   $\Delta(z)/\Delta(0)$  (а) и  $\Sigma\Delta(z)/\Sigma\Delta(\infty)$  (б)

величине) больше, чем вклад объекта  $V_i^0$ . Это, конечно, связано с тем, что при (правильном, по нашему мнению) определении (9) относительного вклада  $\Delta$  разность фаз  $\varphi^B - \varphi^H$  для расположенного посередине между центрами генераторной и измерительной антенн объекта  $V_i^0$  может, в принципе, иметь произвольное значение. Это обуславливает и то, что в соответствии с определением (9), нельзя полагать, что показанные на **рис. 6** результаты моделирования это зоны Френеля при "строгом" подходе к определению такого понятия.

Графики на **рис. 8, б** показывают зависимости от  $z/\lambda_e$  отношения  $\Sigma\Delta(z)/\Sigma\Delta(\infty) = \int_{-z}^z \Delta(z) dz / \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(z) dz$ , характеризующего влияние на напряжения  $\mathcal{E}_{MN}$  совокупности объектов  $V_i$ , центры которых лежат (при  $x=0.5 \cdot x_r, y=0$ ) на отрезке  $\pm z$  по сравнению с влиянием на  $\mathcal{E}_{MN}$  всех объектов  $V_i$ , с центрами на прямой  $x=0.5 \cdot x_r, y=0$ .

Можно полагать, что если  $\Sigma\Delta(z)/\Sigma\Delta(\infty)$  близко к единице, то отрезок  $\pm z$  определяет один из линейных размеров  $z^{\text{сущ}}$  той области пространства, которая оказывает основное влияние на результаты измерений. Если сечение этой области – круг, то  $z^{\text{сущ}}$  – радиус такого круга. На этом же рисунке отрезками вертикальных линий показаны (нормированные на  $\lambda_e$ ) максимальные радиусы первых зон Френеля  $l_1^\Phi$ . Эти радиусы определены для "точечных" возбудителей ( $T$ ) гармонических волн и "точечных" измерителей (точек наблюдения  $r$ ) на основе тех выражений, которые справедливы при произвольном соотношении между

расстоянием  $L_{Tr}$  и  $l_1^\Phi = \sqrt{\frac{\lambda_e}{4} \left( \frac{\lambda_e}{4} + L_{Tr} \right)}$ . На этом рисунке видно, что соотношение между  $z^{сущ}$  и  $l_1^\Phi$  в значительной степени зависит от того, в какой зоне генераторной антенны расположена измерительная антенна, то есть каково отношение  $L_{Tr}/\lambda_e$ . Если, например, за  $z^{сущ}$  принять (минимальное) расстояние от середины отрезка  $L_{Tr}$ , при котором  $\Sigma\Delta(z)/\Sigma\Delta(\infty)=0.9$ , то при  $L_{Tr}/\lambda_e \gg 1/(2\pi)$  (дальняя зона)  $z^{сущ} \approx (0.6-0.7) \cdot l_1^\Phi$  (сплошные и штриховые линии на [рис. 8, б](#)). Если же измерительная антенна расположена в промежуточной зоне возбудителя квазистационарного ЭМ поля (пунктирные линии на [рис. 8, б](#)), то, во-первых, радиусы  $l_1^\Phi$  значительно меньше  $\lambda_e$ , а, во-вторых,  $z^{сущ} \ll l_1^\Phi$ ; в приведенном примере  $z^{сущ} \approx 0.1 \cdot l_1^\Phi$ . То есть при этих условиях представления о том, что область пространства, оказывающая существенное влияние на результаты измерений, соответствует половине первой зоны Френеля с радиусом  $l_1^\Phi$  "не совсем справедливы".

## 2. Влияние локальных объектов на результаты методов сопротивлений электроразведки

В этом разделе приведены примеры математического моделирования, иллюстрирующие то, какое влияние на результаты измерений с различными установками метода сопротивлений могут оказывать малые объекты  $V_i$ , либо имеющие различную форму локальные объекты  $V_0$ , расположенные в однородном проводящем полупространстве или в верхнем слое горизонтально-слоистой (1D) модели среды.

### 2.1. Локальный объект $V_i$ в однородном проводящем полупространстве

Пусть малый объект  $V_i$  в форме шара с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_0$  находится в однородном проводящем полупространстве с удельным электрическим сопротивлением  $\rho=\rho_1$ , на границе  $S$  которого, в плоскости  $z=0$ , расположены токовые точечные электроды  $A, B$  и точки наблюдения (точечные измерительные электроды)  $M, N$  (рис. 9). В этом случае, например, потенциал  $U^{\text{п}}$  первичного поля  $\mathbf{E}^{\text{п}}$  (создаваемого зарядом  $e_A$  токового точечного электрода  $A$  с эмиссией  $I$ ) в центре  $a$  малого объекта  $V_i$  согласно (2) определяет равенство:  $U^{\text{п}}(a) = (\rho_1 I) / (2\pi L_{aA})$ . В соответствии с (3), (4) в точке  $M$  потенциал вторичного поля  $\mathbf{E}^{\text{в}}$  зарядов, индуцированных на границе объекта  $V_i$  определяют выражения:

$$U^{\text{в}}(M) = U_{px}^{\text{в}}(M) + U_{py}^{\text{в}}(M) + U_{pz}^{\text{в}}(M),$$

$$U_{px}^{\text{в}}(M) = G \cdot p_x \frac{x_M - x_a}{L_{aM}^3}, \quad U_{py}^{\text{в}}(M) = G \cdot p_y \frac{y_M - y_a}{L_{aM}^3}, \quad U_{pz}^{\text{в}}(M) = G \cdot p_z \frac{z_M - z_a}{L_{aM}^3},$$

$$G = 1/(4\pi\epsilon_0), \quad L_{aM} = \sqrt{(x_M - x_a)^2 + (y_M - y_a)^2 + (z_M - z_a)^2}.$$

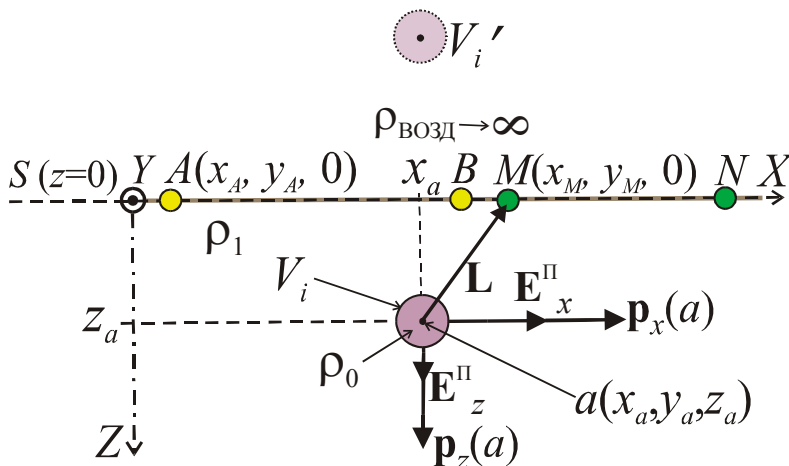


Рис. 9. Локальный объект  $V_i$  в однородном проводящем полупространстве

Но для выполнения краевого условия (2-го типа) на границе проводника с изолятором (в плоскости  $z=0$ ) нужно, чтобы в проводнике, при  $z \rightarrow 0, z > 0$  выполнялось равенство:  $-E_z = (\partial U / \partial z) = 0$  ([Альпин, 1971]). Для выполнения этого краевого условия можем воспользоваться методом зеркальных изображений и "отразить" модель среды в нижнем полупространстве ( $z > 0$ )

в верхнее полупространство ( $z < 0$ ). При таком подходе источниками вторичного поля  $\mathbf{E}^{\text{в}}$  (формально) являются заряды, индуцированные на поверхностях двух одинаковых объектов  $V_i$  и  $V_i'$ , симметричных относительно плоскости  $S$



(см. рис. 9). Дипольные моменты  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{p}$  объектов  $V_i'$  и  $V_i$  одинаковы по абсолютной величине и имеют чётную симметрию относительно плоскости  $S$ . Фактически полем зарядов на поверхности  $S[V_i']$  мы заменяем поле зарядов индуцированных на плоскости  $S$ . В этом случае при получении приближённых формул и расположении точки наблюдения  $M$  на плоскости  $S$  правые части выражений вида (4) для слагаемых  $U_{px}^B(M)$ ,  $U_{py}^B(M)$ ,  $U_{pz}^B(M)$ , следует просто умножить на два. Таким образом, в точке  $M$  потенциал поля  $\mathbf{E}^n$  и составляющие потенциала  $U^B$  поля  $\mathbf{E}^B$  определяют выражения:

$$\begin{aligned} U^n(M) &= \frac{\rho_1 \cdot I}{2\pi \cdot L_{AM}}, & U_{px}^B(M) &= 2 \cdot p_x \frac{x_M - x_a}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot L_{aM}^3}, \\ U_{py}^B(M) &= 2 \cdot p_y \frac{y_M - y_a}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot L_{aM}^3}, & U_{pz}^B(M) &= 2 \cdot p_z \frac{z_M - z_a}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot L_{aM}^3}. \end{aligned} \quad (10)$$

Описанный выше подход не сложно обобщить для случая, когда заданными источниками первичного поля  $\mathbf{E}^n$  являются расположенные на границе  $S$  токовые точечные электроды:  $A$  с положительной эмиссией  $I$  и координатами  $x_A, y_A, 0$  и  $B$  с отрицательной эмиссией  $-I$  и координатами  $x_B, y_B, 0$  (точнее – заряды этих электродов, равные  $\pm 2\epsilon_0 \cdot \rho_1 \cdot I$ ), а измеряемой величиной является разность потенциалов  $\Delta U_{MN} = U_M - U_N$  между точками (точечными измерительными электродами)  $M(x_M, y_M, 0)$  и  $N(x_N, y_N, 0)$ , см. рис. 9.

При этих условиях разность потенциалов  $\Delta U_{MN}^n$  первичного поля  $\mathbf{E}^n$  определяет известное выражение:

$$\Delta U_{MN}^n = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left( \frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM} + \frac{1}{BN} \right),$$

а для кажущегося удельного электрического сопротивления  $\rho_k$  получаем равенство:

$$\rho_k = K \cdot \frac{\Delta U_{MN}}{I} = K \cdot \frac{\mathcal{E}_{MN}}{I}, \quad \text{где} \quad K = 2\pi \left/ \left( \frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM} + \frac{1}{BN} \right) \right. -$$

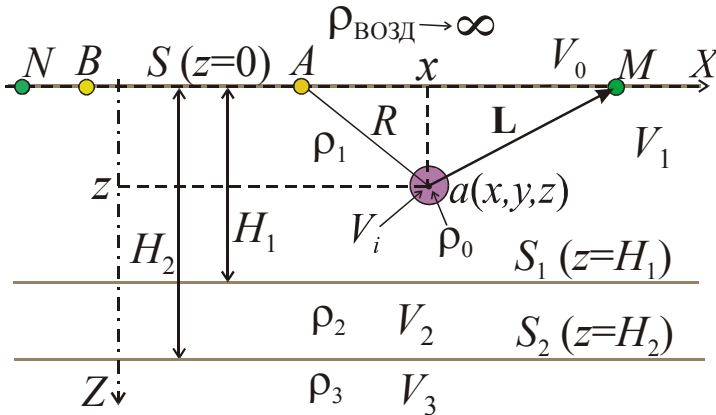
коэффициент (четырёхэлектродной) электроразведочной установки метода сопротивлений.

В присутствии границы  $S$  и объекта  $V_i$  к полю  $\mathbf{E}^n$  в области  $V_e$  и, в частности, в точках  $M, N$ , добавляется вторичное поле  $\mathbf{E}^B$ , создаваемое не только зарядами, индуцированными на границе  $S[V_i]$  объекта  $V_i$ , но также зарядами на плоскости  $S$ .

## 2.2. Локальный объект $V_i$ в верхнем слое трёхслойной модели среды

Решение 1D прямой задачи о поле точечного токового электрода  $A$ , расположенного на плоской горизонтальной границе  $S$  изолятора и проводящей среды с плоскопараллельными горизонтальными границами давно известно (см., например, учебник [Заборовский, 1963]). При интерпретации результатов ВЭЗ предполагают, что в полученном решении представляют интерес только выражения для потенциала  $U$  на поверхности  $S$  проводящего полупространства – в точечных измерительных электродах (точках  $M, N$ ).

Но для применения описанного выше подхода необходимо определить компоненты электрического поля  $\mathbf{E}$  в произвольной точке  $a$  проводящего полупространства – там, где может находиться центр малого локального объекта



**Рис. 10.** Локальный объект  $V_i$  в верхнем слое трёхслойной модели проводящего полупространства

координатами  $x_a=x$ ,  $y_a=y$ ,  $z_a=z$ . Для показанной на рис. 10 "3-х слойной" модели проводящего полупространства (в отсутствии локального объекта  $V_i$ ) при  $\mathbf{E} = -\text{grad } U$  потенциал  $U(a)$  должен удовлетворять условиям краевой задачи для проводящего полупространства  $z > 0$ , постановка которой приведена, например, в книге [Заборовский, 1963].

В модели среды на рис. 10, в отсутствии объекта  $V_i$ , суммарное поле  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^n + \mathbf{E}^b$ . Источником первичного поля  $\mathbf{E}^n$  с потенциалом  $U^n$  является заряд электрода  $A$ . Источниками вторичного поля  $\mathbf{E}^b$  служат поверхностные заряды, индуцированные на границах  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ . Пользуясь интегралом Вебера-Липшица (см., например, книгу [Альпин, 1971]), потенциал  $U^n$  можем выразить в следующем виде:  $U^n = \frac{\rho_1 I}{2\pi R} = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \exp(-m|z|) J_0(mr) dm$ , где  $J_0(mr)$  – функция

Бесселя первого рода нулевого порядка аргумента  $mr$ , а  $r = \sqrt{(x - x_A)^2 + y^2}$ . В 1D-модели среды в областях  $V_{1,2,3}$  потенциалы  $U_{1,2,3}$  должны удовлетворять условиям следующей краевой задачи.

- 1). В однородных по  $\rho$  областях  $V_{1,2,3}$ : при  $R \neq 0$   $\nabla^2 U_1 = 0$ ,  $\nabla^2 U_2 = 0$ ,  $\nabla^2 U_3 = 0$ .
- 2). При  $R = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{(x - x_A)^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$   $U_{1,2,3} \rightarrow 0$ .
- 3). При  $z = 0$   $\partial U_1 / \partial z = 0$ .
- 4). При  $R \rightarrow 0$   $U_1 \rightarrow \infty$  как  $(\rho_1 I) / (2\pi R)$ .
- 5). При  $z = H_1$ : а)  $U_2 = U_1$ , б)  $\rho_1 \frac{\partial U_2}{\partial z} = \rho_2 \frac{\partial U_1}{\partial z}$ .
- 6). При  $z = H_2$ : а)  $U_3 = U_2$ , б)  $\rho_2 \frac{\partial U_3}{\partial z} = \rho_3 \frac{\partial U_2}{\partial z}$ .

$V_i$ . При получении соответствующих результатов моделирования ниже ограничимся следующим случаем. Проводящее полупространство – "трёхслойное", а малый локальный объект  $V_i$  расположен в верхнем слое  $V_1$  горизонтально-слоистой модели среды (рис. 10).

Определим сначала "нормальное" (в 1D- модели среды) поле электрода  $A$  с эмиссией  $I$  и с координатами  $x_A, y_A=0, z_A=0$  в произвольной точке  $a$  с

В результате решения краевой задачи получаем выражения для потенциалов  $U_1, U_2, U_3$  поля  $\mathbf{E}$  в областях  $V_1, V_2, V_3$ . В частности, потенциал  $U_1$  поля  $\mathbf{E}_1$  в области  $V_1$  (в отсутствии объекта  $V_i$ ) определяют равенства:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \{ \exp(-m|z|) + B_1 [\exp(-mz) + \exp(mz)] \} J_0(mr) dm, \\ B_1 &= \frac{[k_{12} \exp(-2mH_1) + k_{23} \exp(-2mH_2)] \exp(-2mH_1)}{[1 - k_{12} \exp(-2mH_1)] \exp(-2mH_1) - k_{23} [\exp(-2mH_1) - k_{12}] \exp(-2mH_2)}, \end{aligned} \right\}$$

в которых  $k_{12} = (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_2 + \rho_1)$ ,  $k_{23} = (\rho_3 - \rho_2) / (\rho_2 + \rho_3)$  – коэффициенты контрастности границ  $S_1, S_2$ , а  $H_1, H_2$  – расстояния от этих границ до плоскости  $S$  (см. рис. 10).

Аналогичные выражения можем получить для случая, когда источником поля  $\mathbf{E}^n$  является лежащий на оси  $X$  точечный токовый электрод  $B$  с отрицательной эмиссией  $-I$ , зарядом  $-2\varepsilon_0 \cdot \rho_1 \cdot I$  и координатами  $x_B, y_B=0, z_B=0$ . Затем, путём суммирования, определяем потенциал  $U_1$  поля  $\mathbf{E}^{(1)}$ , создаваемого в верхнем слое  $V_1$  модели среды зарядами токовых точечных электродов  $A, B$  и поверхностными зарядами индуцированными на границах  $S, S_1, S_2$ . При известном  $U_1$  не сложно получить выражения для скалярных декартовых компонент поля  $\mathbf{E}^{(1)}$ , пользуясь равенствами:  $E_x^{(1)} = -\partial U_1 / \partial x, \dots$ . Тогда, например, для компоненты  $E_x^{(1)}$  поля  $\mathbf{E}^{(1)}$  в точке  $a$ , расположенной в слое  $V_1$  (см. рис. 10), получаем следующее выражение:

$$\left. \begin{aligned} E_x^{(1)}(a) &= \frac{\rho_1 I (x - x_A)}{2\pi} \cdot \left\{ \frac{1}{R_A^3} + \frac{1}{r_A} \int_0^\infty m \cdot B_1 \cdot [\exp(-mz) + \exp(mz)] J_1(mr_A) dm \right\} - \\ &- \frac{\rho_1 I (x - x_B)}{2\pi} \cdot \left\{ \frac{1}{R_B^3} + \frac{1}{r_B} \int_0^\infty m \cdot B_1 \cdot [\exp(-mz) + \exp(mz)] J_1(mr_B) dm \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $J_1(mr_A), J_1(mr_B)$  – функции Бесселя первого рода первого порядка. Их аргументы:  $mr_{A,B} = m \sqrt{(x - x_{A,B})^2 + y^2}$ , а расстояния:  $R_{A,B} = \sqrt{r_{A,B}^2 + z^2}$ .

Это выражение для  $E_x^{(1)}(a)$  (и подобные ему выражения для компонент  $E_y^{(1)}(a), E_z^{(1)}(a)$ ), отвечают случаю, когда токовые точечные электроды  $A, B$  расположены на поверхности горизонтально-слоистой модели среды (в плоскости  $z=0$ ), на оси  $X$ . Равенства вида (11) определяют компоненты нормального поля  $\mathbf{E}^{(1)}$  в верхнем слое 1D- модели среды. Понятно, что не сложно получить подобные выражения для компонент поля  $\mathbf{E}^{(1)}$  других установок методов сопротивлений.

Если точка  $a$  – центр имеющего изометричную форму малого объекта  $V_i$  в форме шара с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_0$ , который расположен в слое  $V_1$  модели среды (см рис. 10), то согласно (1) декартовы компоненты дипольных моментов:  $p_x(a) = F \cdot E_x^n(a), p_y(a) = F \cdot E_y^n(a), p_z(a) = F \cdot E_z^n(a)$ , где

$$F = 3\varepsilon_0 \frac{1 - (\rho_0 / \rho_1)}{1 + 2(\rho_0 / \rho_1)} v_i, \quad v_i = (4/3) \cdot \pi \cdot R_{ш}^3 \quad \text{а компоненты } E_x^n(a), E_y^n(a), E_z^n(a)$$

определяют выражения вида (11) для нормального поля. Пользуясь равенствами, подобными выражениям (10), не сложно оценить то, какое влияние оказывает

наличие (в слое  $V_1$ ) объекта  $V_i$  с дипольным моментом  $\mathbf{p} = p_x \mathbf{1}_x + p_y \mathbf{1}_y + p_z \mathbf{1}_z$  на потенциалы  $U(M)$ ,  $U(N)$  их разность  $\Delta U_{MN}$  и величину  $\rho_k$ .

Понятно, что, электрическое поле индуцированных на поверхности  $S[V_i]$  объекта  $V_i$  зарядов оказывает влияние на плотности зарядов на границах  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  (см. [рис. 10](#)). Для частичного учёта такого влияния, пользуясь методом зеркальных изображений, можем "отразить" объект  $V_i$  в верхнее полупространство (см. [рис. 9](#)). Это обеспечит выполнение краевого условия 2-го типа на плоскости  $S$  и проявится в удвоении потенциалов поля, обусловленного присутствием  $V_i$ , в лежащих на плоскости  $S$  точках  $M$ ,  $N$ . Для более точного учёта влияния электрического поля индуцированных на  $S[V_i]$  зарядов на распределение зарядов на всех горизонтальных границах необходимо выполнение более сложных расчётов (см. [Альпин, 1971], с. 228 – 233).

Описанный выше метод определения влияния объекта  $V_i$  на потенциалы  $U(M)$ ,  $U(N)$ ,  $\Delta U_{MN}$  и  $\rho_k$  – значительно проще, чем, например, применение для определения такого влияния метода интегральных уравнений. Вместе с тем автор понимает, что предложенный им подход, безусловно, является приближённым, так как не учитывает следующего. 1) Вторичное поле зарядов, индуцированных на границе объекта  $V_i$ , оказывает некоторое влияние на распределение поверхностных зарядов на горизонтальных границах, что лишь частично учитывается при описанной выше методике расчётов. 2) При определении поля объекта  $V_i$  принято допущение, что этот объект имеет форму шара и (в отсутствие этого объекта) поле  $\mathbf{E}$  в горизонтально - слоистой модели среды в пределах области  $V_i$  можно полагать однородным. Тем не менее можно надеяться, что при достаточно малых размерах и изометричной форме объектов  $V_i$  принятые допущения не должны приводить к значительным погрешностям при оценке влияния приповерхностных локальных объектов на величины  $\Delta U_{MN}$  и значения  $\rho_k$ . Ниже, в разделе 2.3, рассмотрены результаты численных расчётов для моделей среды, показанных на [рис. 9, 10](#).

### **2.3. Моделирование С-эффекта и Р-эффекта в методах сопротивлений электроразведки**

Наверное впервые определения понятий "Р (potential)– эффект", "С (current)– эффект" даны в статье [Бобачёв А. А. и др., 1995]. Эти эффекты были описаны в изданных в МГУ учебном пособии ["Электроразведка", 2005], из которого нами заимствованы приведенные ниже определения понятий "Р- эффект" и "С- эффект".

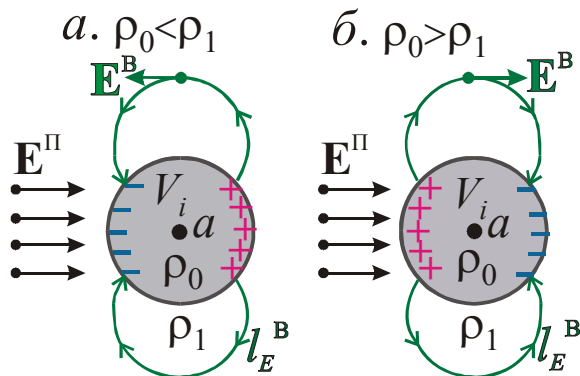
Традиционными объектами исследования в методах сопротивления электроразведки являются субгоризонтальные границы слоёв, различающихся по удельному электрическому сопротивлению  $\rho$  (методы ВЭЗ, ДЭЗ), наклонные или вертикальные границы (электропрофилирование с различными установками), а также глубинные неоднородности по  $\rho$ . Приповерхностные неоднородности (ППН) по  $\rho$  обычно не представляют интереса и являются "геологической помехой".

В соответствии с терминологией, применённой в названных выше работах, различают два вида (обусловленных ППН) эффектов, "искажающих" кривые зондирования, а также электропрофилирования. Это – искажения, вызванные неоднородностями, расположенными вблизи измерительных электродов (Р-эффект) или вблизи питающих электродов (С-эффект). Р-эффект проявляется как вертикальный сдвиг всей кривой зондирования по оси кажущихся удельных электрических сопротивлений  $\rho_k$  без изменения формы кривой. По мнению авторов книги ["Электроразведка", 2005] "Р-эффект возникает за счёт *изменения плотности электрического тока*  $j_{MN}$  над неоднородностью (вблизи приёмных электродов  $M, N$ ) по сравнению с плотностью тока  $j_0$  в горизонтально-слоистом разрезе". При Р-эффекте кривая зондирования сдвигается вверх или вниз, причем значения изменяются в зависимости от локального изменения *плотности тока*  $j_{MN}$  вблизи ППН. С-эффект – это искажения кривых  $\rho_k$ , вызванные движением питающих электродов над ППН. При С-эффекте изменяется форма кривой зондирования и кажущееся число слоев на ней.

"В поддержку" одного из моих Учителей – Л. М. Альпина необходимо в очередной раз обратить внимание возможных читателей на то, что на результаты измерений в методах сопротивлений электроразведки влияет не вектор  $\mathbf{j}$  плотности электрического тока, а нечто другое. Это – поле  $\mathbf{E}$ , точнее напряжение этого поля  $\mathcal{E}_{MN} = \int_M^N (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = \Delta U_{MN}$ . От плотности  $\mathbf{j}$  электрического тока измеряемая в методах сопротивлений величина  $\Delta U_{MN}$  "непосредственно" *не зависит*, а зависит она от напряжённости  $\mathbf{E}$  суммарного электрического поля, а, по крайней мере, "в рамках" классической электродинамики, *единственными* источниками стационарного поля  $\mathbf{E}$  являются электрические заряды.

Предварительно ещё, возможно, нужно напомнить о следующем. В соответствии с (1) в случае, если объект  $V_i$  в форме шара с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_0$  расположен в однородной среде с  $\rho = \rho_1$ , то при однородном стационарном первичном электрическом поле  $\mathbf{E}^{\text{П}}$  вторичное поле вне области  $V_i$  идентично полю диполя с моментом  $\mathbf{p} = F \cdot \mathbf{E}^{\text{П}}$ . В соответствии с (1) множитель  $F$  пропорционален объёму шара и зависит от отношения  $\rho_0/\rho_1$ , точнее

от величины,  $C = \frac{1 - (\rho_0/\rho_1)}{1 + 2 \cdot (\rho_0/\rho_1)}$  которая при



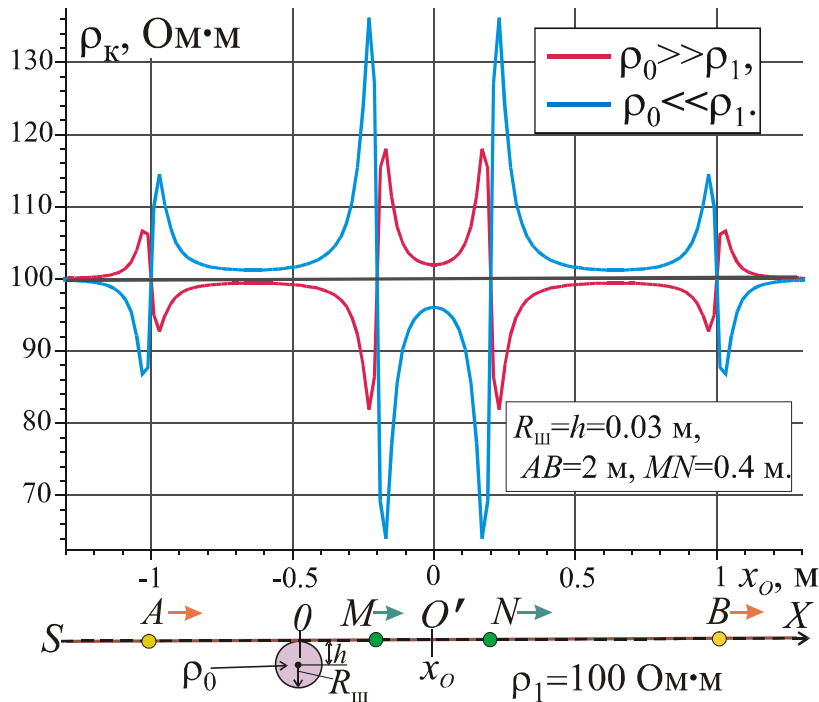
**Рис. 11.** Объект в форме шара в однородном первичном поле  $\mathbf{E}^{\text{П}}$

$\rho_0 \neq \rho_1$  может быть положительной или отрицательной. Фактически, конечно, источники вторичного поля  $\mathbf{E}^{\text{B}}$  – это поверхностные заряды индуцированные на границе объекта  $V_i$  (рис. 11), а их распределение на границе  $S[V_i]$  зависит от отношения  $\rho_0/\rho_1$  и от направления поля  $\mathbf{E}$ . На этом рисунке показаны векторные линии  $l_{E^{\text{B}}}$  поля  $\mathbf{E}^{\text{B}}$ . Видно, что над центром объекта при  $\rho_0 < \rho_1$  поле  $\mathbf{E}^{\text{B}} \uparrow \downarrow \mathbf{E}^{\text{П}}$ , а при  $\rho_0 > \rho_1$   $\mathbf{E}^{\text{B}} \parallel \mathbf{E}^{\text{П}}$ .

Соответственно в первом случае над центральной частью объекта абсолютная величина суммарного поля  $|\mathbf{E}|=E<E^{\text{II}}$ , а во втором –  $E>E^{\text{II}}$ .

### 2.3.1. Пример результатов моделирования для электропрофилирования

На **рис. 12** приведен пример моделирования для условий электропрофилирования с установкой Шлюмберже  $AMNB$ . В этом примере в



**Рис. 12.** Кривые электропрофилирования для установки Шлюмберже в присутствии имеющего изометричную форму приповерхностного локального объекта  $V_i$

однородном проводящем полупространстве с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_1$  расположен объект  $V_i$  (малых размеров) в форме шара с радиусом  $R_{\text{ш}}$  и с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_0$ . Декартовы координаты центра  $a$  объекта  $V_i$ :  $x_a=0$ ,  $y_a=0$ ,  $z_a=h=R_{\text{ш}}$ . Показана зависимость кажущегося удельного электрического сопротивления  $\rho_k=K \cdot \mathcal{E}_{MN}/I$  (где  $K$  – коэффициент установки) от координаты  $x_o$  центра  $O'$  расположенной на оси  $X$  симметричной установки  $AMNB$

относительно координаты  $0$  ( $x_a=0$ ,  $y_a=0$ ) эпицентра объекта  $V_i$ . Понятно, что при расчете кривой электропрофилирования расстояния между электродами не менялись, а центр  $O'$  электроразведочной установки перемещался над объектом  $V_i$ .

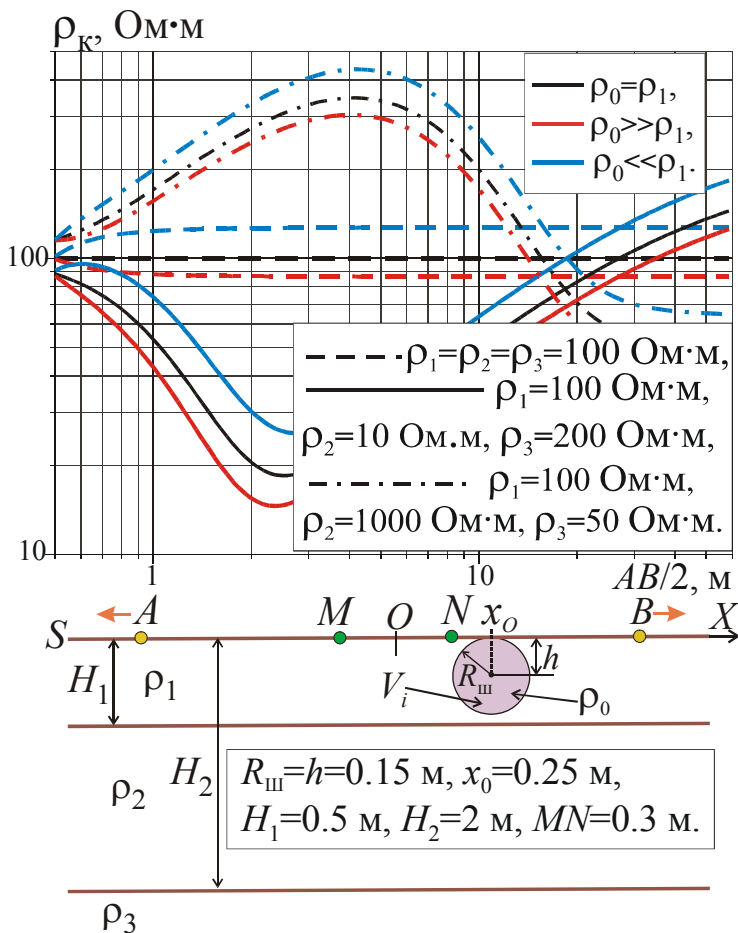
Результаты моделирования на **рис. 12** приведены для двух случаев. В одном из них  $\rho_0 \gg \rho_1$  (кривая красного цвета), в другом –  $\rho_0 \ll \rho_1$  (кривая синего цвета). Понятно (см. **рис. 11**), что в этих 2-х случаях при фиксированном положении электродов  $A, B$  вторичные электрические поля, создаваемые зарядами, индуцированными на границе объекта  $V_i$ , над этим объектом имеют противоположные направления. Это соответствующим образом сказывается и на кривых профилирования на **рис. 12** при  $\rho_0 \gg \rho_1$  и  $\rho_0 \ll \rho_1$ . Заметим, что при  $\rho_0 \ll \rho_1$  обусловленные объектом  $V_i$  эффекты "проявляются" в большей степени, чем при  $\rho_0 \gg \rho_1$ . Формально это связано с тем, что при  $\rho_0 \ll \rho_1$  в выражении (1) множитель

$$C = \frac{1 - (\rho_0 / \rho_1)}{1 + 2 \cdot (\rho_0 / \rho_1)} \approx 1, \text{ а при } \rho_0 \gg \rho_1 \text{ этот множитель } C \approx -0.5.$$

Перемещение каждого из электродов ( $A, M, N, B$ ) над объектом  $V_i$  сопровождается локальной аномалией  $\rho_k$  с двумя экстремумами противоположного знака. По данным в начале раздела 3.1 определениям понятий "С - эффект" и "Р - эффект" *каждую* из этих аномалий мы должны были бы назвать С - эффектом. Пояснением этому может служить то, что при электропрофилеировании перемещаются все электроды и то, что существует принцип взаимности для токовых и измерительных электродов. На **рис. 12** видим, что при перемещении над объектом  $V_i$  (расположенных на относительно небольшом расстоянии друг от друга) электродов  $M, N$  С - эффект проявляется в большей степени, чем при перемещении над объектом  $V_i$  электродов  $A, B$ . Причины того, почему на показанных на **рис. 12** кривых профилирования  $\rho_k$  поразному (противоположным образом) проявляется присутствие объекта  $V_i$  при  $\rho_0 < \rho_1$  и при  $\rho_0 > \rho_1$  – понятны, если обратится к **рис. 11**.

**2.3.2. Примеры моделирования результатов ВЭЗ**

Перейдём теперь к результатам математического моделирования, характеризующим влияние приповерхностных малых объектов  $V_i$  на результаты вертикальных электрических зондирований (ВЭЗ) с установкой Шлюмберже. В



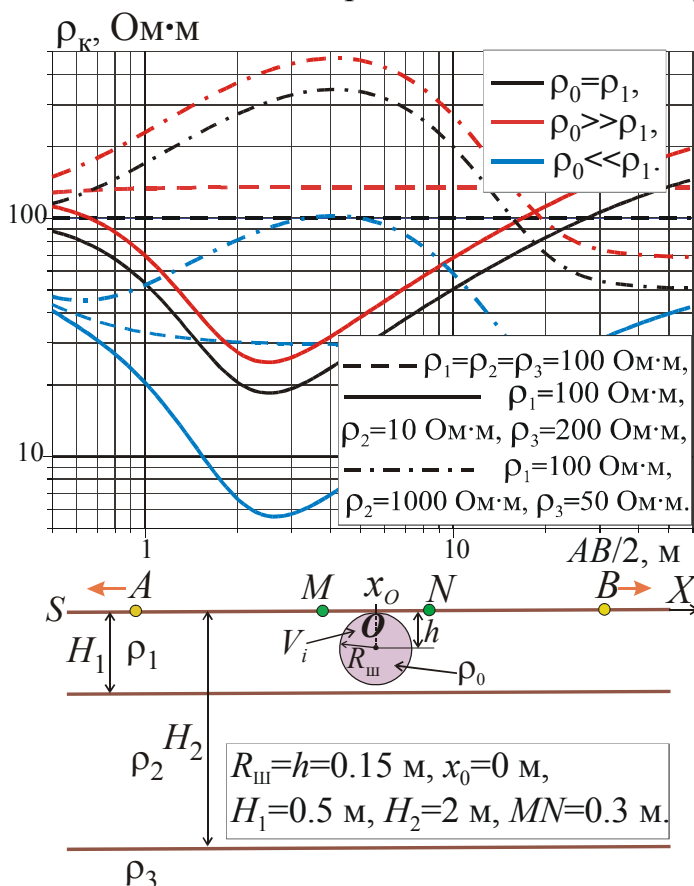
**Рис. 13.** Кривые зондирования типов  $H$  и  $K$  и кривые зондирования при  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$  в отсутствии и в присутствии локального объекта  $V_i$ . Эпицентр объекта  $V_i$  - вне отрезка  $MN$

представленных ниже (на **рис. 13 – 15**) результатах численных расчётов малый объект  $V_i$  в форме шара с радиусом  $R_{ш}$  и с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_0$  расположен в верхнем слое  $V_1$  проводящего полупространства – горизонтально-слоистой 3-х слойной модели среды с удельными электрическими сопротивлениями  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ , и с мощностями  $H_1, h_2 = H_2 - H_1$  и  $\infty$  (см. **рис. 10**). Приведены результаты моделирования трёхслойных кривых зондирования типа  $H$  (сплошные линии), типа  $K$  (штрихпунктирные линии), а также зависимости кажущегося удельного электрического сопротивления  $\rho_k$  от "полуразноса"  $AB/2$  для однородного полупространства (штриховые линии). Чёрным

цветом показаны зависимости  $\rho_k$  от  $AB/2$  в отсутствие объекта  $V_i$ .

На **рис. 13** электроды  $A, M, N, B$  и эпицентр объекта  $V_i$  лежат на оси  $X$ . Эпицентр этот расположен вблизи одного из неподвижных измерительных электродов ( $N$ ) вне отрезка  $MN$ . То влияние, которое оказывает на кривую зондирования присутствие объекта  $V_i$ , в соответствии с определениями в работах [Бобачёв и др., 1995], ["Электроразведка", 2005], можем назвать Р- эффектом. На **рис. 13** видно, что при высоком удельном электрическом сопротивлении  $\rho_0$  объекта  $V_i$  по сравнению с  $\rho_1$  (кривые красного цвета) значения  $\rho_k$  меньше, чем в отсутствие этого объекта. Если объект  $V_i$  имеет низкое значение  $\rho_0$  (кривые синего цвета), то это ведёт к увеличению значений  $\rho_k$  по сравнению с горизонтально-слоистой моделью среды (или однородным полупространством – штриховые линии).

Для физического истолкования таких особенностей влияния объекта  $V_i$  на величину  $\rho_k$  можно применить различные подходы. Например, при положительном заряде электрода  $A$  и отрицательном заряде электрода  $B$  направление электрического поля  $E^H$  в области  $V_i$  в отсутствие объекта (при  $\rho_0 = \rho_1$ ) будет примерно таким же, как показано на **рис. 11** ("вправо"). В присутствии объекта на той части границы объекта, которая расположена ближе к электроду  $N$



**Рис. 14.** Кривые зондирования типов  $H$  и  $K$  и кривые зондирования при  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$  в отсутствие и в присутствии локального объекта  $V_i$ . Эпицентр объекта  $V_i$  - внутри отрезка  $MN$

(см. **рис. 13**) будут индуцированы положительные заряды при  $\rho_0 > \rho_1$  и отрицательные заряды при  $\rho_0 < \rho_1$  (см. **рис. 11, а, б**). Тогда, например, при  $\rho_0 > \rho_1$  в показанной на **рис. 13** ситуации вторичное электрическое поле этих зарядов увеличит потенциал  $U$  поля  $E$  в точке  $N$  (в большей степени, чем в точке  $M$ ). Вследствие этого разность потенциалов  $\Delta U_{MN}$  и величина  $\rho_k$  будут иметь меньшие значения, чем в отсутствие объекта  $V_i$ . Это мы и видим на **рис. 13** при сравнении кривых красного и черного цвета.

Рассмотрим теперь результаты моделирования Р- эффекта для случая, когда проекция центра объекта  $V_i$  на границу  $S$  проводящего полупространства расположена между измерительными электродами  $M, N$ . На **рис. 14** проекция центра  $V_i$  на плоскость  $S$  совпадает с центром  $O$  отрезка  $MN$ . Особенности того,



какое влияние оказывает наличие объекта  $V_i$  на разность потенциалов  $\Delta U_{MN}$  и величину  $\rho_k$  в показанной на рис. 14 модели среды можно пояснить, например, на основе следующих представлений. При  $\rho_0 < \rho_1$  (см. рис. 11, а) влияние индуцированных на поверхности объекта зарядов ведёт к уменьшению потенциала электрода  $M$  и увеличению потенциала электрода  $N$ . Вследствие этого уменьшится разность потенциалов  $\Delta U_{MN}$  и величина  $\rho_k$  (кривые синего цвета на рис. 14). Наоборот, при  $\rho_0 > \rho_1$  (см. рис. 11, б) и показанном на рис. 14 положении объекта  $V_i$  влияние индуцированных на границе объекта зарядов приводит к уменьшению  $U_N$ , увеличению  $U_M$ ,  $\Delta U_{MN}$  и, соответственно, повышению  $\rho_k$  (кривые красного цвета на рис. 14).

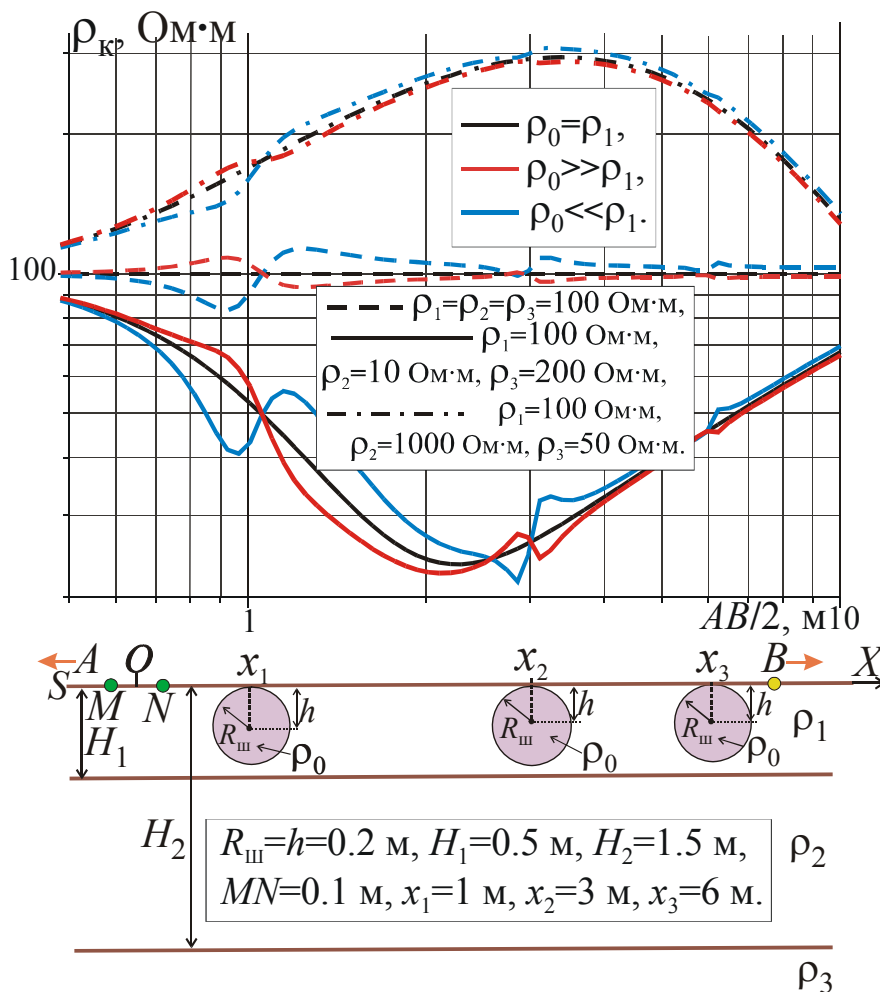
Отметим, что (при прочих одинаковых условиях) количественно влияние объекта  $V_i$  на значения  $\rho_k$  в случае, показанном на рис. 14, проявляется в большей степени, чем при расположении этого объекта, показанном на рис. 13. Кроме того, как видно на рис. 14, относительное влияние локального объекта на величину  $\rho_k$  сильнее проявляется при выполнении неравенства  $\rho_0 \ll \rho_1$ . Как уже было отмечено,

в этом случае в выражениях (1) величина множителя

$$C = \frac{1 - (\rho_0 / \rho_1)}{1 + 2 \cdot (\rho_0 / \rho_1)}$$

максимальна –  $C \approx 1$ . При противоположном соотношении между  $\rho_0$  и  $\rho_1$  ( $\rho_0 \gg \rho_1$ ) множитель  $C \approx -0.5$  и относительное влияние локального объекта  $V_i$  на  $\Delta U_{MN}$  и  $\rho_k$  проявляется в меньшей степени.

Рассмотрим теперь пример результатов моделирования С-эффекта, когда при электрических зондированиях с установкой Шлюмберже один из подвижных электродов (в приведенном примере – питающий электрод  $B$ ) перемещается над приповерхностными объектами



**Рис. 15.** Моделирование С- эффекта при электрических зондированиях с установкой Шлюмберже. Кривые зондирования типов  $H$  и  $K$  и кривые зондирования при  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$  в отсутствии и в присутствии трёх объектов  $V_i$

$V_i$ . На **рис. 15** показаны результаты расчётов для следующего случая. Под линией, по которой перемещается электрод  $B$ , находятся центры трёх одинаковых объектов  $V_i$ . Объекты эти находятся на разных расстояниях от центра  $O$  зондирования и, соответственно, от измерительных электродов  $M, N$ . Как и на **рис. 13, 14**, на **рис. 15** показаны результаты расчётов влияния объектов  $V_i$  на кривые типа  $H$  (сплошные линии), типа  $K$  (штрихпунктирные линии) и на зависимости  $\rho_k$  от  $AB/2$  для однородного проводящего полупространства (штриховые линии). Чёрным цветом показаны зависимости  $\rho_k$  от  $AB/2$  в отсутствие объекта  $V_i$ .

Понятно, что при перемещении токового электрода над объектом  $V_i$  меняется направление и абсолютная величина первичного электрического поля этого электрода в пределах  $V_i$  и характер распределения индуцированных зарядов на границе  $S[V_i]$ . Формально этому соответствует изменение направления и абсолютной величины дипольного момента  $\mathbf{p}$  объекта  $V_i$ . То есть проявление на кривых зондирования С-эффекта можно пояснить следующим образом. При расположении точечного источника поля  $\mathbf{E}^n$  (заряда точечного электрода) на достаточно малом расстоянии от  $V_i$  на значения  $U_M, U_N, \Delta U_{MN}$  оказывает влияние "дополнительный" источник, подобный диполю с моментом  $\mathbf{p}$ . При этом абсолютная величина и направление вектора  $\mathbf{p}$  существенно зависит от положения токового электрода относительно  $V_i$ .

На **рис. 15** видим, что при расположении токового электрода по одну, либо по другую сторону эпицентра объекта  $V_i$  влияние индуцированных на границе этого объекта зарядов приводит соответственно к повышению, либо понижению значений  $\Delta U_{MN}$  и  $\rho_k$ . Влияние С-эффекта приводит к тому, что даже при качественной интерпретации кривой зондирования мы "видим" большее число слоёв, чем то, которое в действительности имеет горизонтально - слоистая среда. Анализ результатов моделирования, пример которых показан на **рис. 15**, позволил установить некоторые закономерности того как проявляется С-эффект при вертикальных электрических зондированиях с установкой Шлюмберже. Обратим внимание на две из этих закономерностей.

Искажающее кривую зондирования влияние объектов  $V_i$  на величину  $\rho_k$  (пропорциональную разности  $\Delta U_{MN}$  при фиксированных эмиссиях  $\pm I$  электродов  $A, B$ ), как и следовало ожидать, резко уменьшается с удалением объекта от электродов  $M, N$ . Это можно объяснить на основе того же подхода, который был применён при анализе результатов моделирования на **рис. 12**. Потенциал поля  $\mathbf{E}^n$  точечного токового электрода обратно пропорционален расстоянию до электрода, а потенциал поля  $\mathbf{E}^b$  (подобного полю  $\mathbf{E}$  диполя), создаваемого индуцированными на поверхности объекта  $V_i$  зарядами обратно пропорционален квадрату расстояния до центра объекта.

При больших расстояниях от электродов  $M, N$  до токового электрода и расположенного в его окрестности объекта  $V_i$  влияние последнего на  $\Delta U_{MN}$  и  $\rho_k$  незначительно. При малых расстояниях от одного из токовых электродов  $A, B$  до

$V_i$  нормальное поле  $\mathbf{E}$ , которому пропорционален дипольный момент  $\mathbf{p}$  объекта  $V_i$ , близко к полю  $\mathbf{E}^n$  одного из этих электродов, которое, в свою очередь, при заданном токе  $I$  в цепи  $AB$  пропорционально удельному электрическому сопротивлению  $\rho_1$  верхнего слоя. То есть в этом случае абсолютная величина  $|\mathbf{p}|$  дипольного момента и "вклад" объекта  $V_i$  в значения  $\Delta U_{MN}$  и  $\rho_k$  тем больше, чем больше  $\rho_1$ . Но, при вертикальных электрических зондированиях все параметры горизонтально-слоистой модели среды ( $\rho_1, \rho_2, \rho_3, H_1, H_2, \dots$ ) оказывают влияние на  $\Delta U_{MN}$  и  $\rho_k$ . Вследствие этого значения  $\rho_k$  на трёхслойных кривых типа  $H$  ( $\rho_1 > \rho_2 < \rho_3$ ) или типа  $Q$  ( $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$ ) могут быть значительно меньше, чем величина  $\rho_1$ . Поэтому, в тех примерах моделирования, результаты которых представлены на **рис. 15**, наибольшее относительное влияние объекта  $V_i$  на значения  $\rho_k$  проявляется на кривой типа  $H$ , при  $\rho_k \ll \rho_1$ .

Приведенные выше примеры моделирования показывают, что пользуясь применённым подходом и разработанными на этой основе алгоритмами и программами, не сложно количественно оценить влияние малых приповерхностных локальных объектов изометричной формы на величину  $\rho_k$ . Для такой оценки, конечно, нужны данные о предполагаемых параметрах среды, в частности, о размерах объекта  $V_i$ , его глубине и удельном электрическом сопротивлении.

### ***2.3.3. Представление зависимости влияния объекта $V_i$ на величину $\rho_k$ от положения эпицентра $V_i$ относительно электродов в виде карты***

В примерах моделирования, приведенных на **рис. 12 - 15**, проекции центров приповерхностных локальных объектов  $V_i$  на плоскость  $S$  ( $z=0$ ) лежат на оси  $X$  – той же прямой, на которой расположены электроды  $A, M, N, B$  установки Шлюмберже. При ином положении объекта  $V_i$  его влияние на величину  $\rho_k$  можем изобразить в виде карт (в плоскости  $S$ ) – зависимостей такого влияния от координат  $x, y$  эпицентра объекта  $V_i$  при, фиксированных параметрах объекта и его глубине. Примеры такого представления результатов моделирования приведены на **рис. 16, 17**.

На этих картах положение токовых и измерительных электродов показаны кружками желтого и зелёного цвета. Красным и синим цветом показаны значения величины  $\delta\rho_k$  (%), характеризующей относительное влияние объекта  $V_i$  на значение  $\rho_k$ . Величина  $\delta\rho_k$  определена по формуле:

$$\delta\rho_k = \frac{\rho_k^{\text{ан}} - \rho_k^{\text{н}}}{\rho_k^{\text{н}}} \cdot 100\%,$$

где  $\rho_k^{\text{ан}}$  и  $\rho_k^{\text{н}}$  – значения  $\rho_k$  соответственно в присутствии и в отсутствие объекта  $V_i$ .

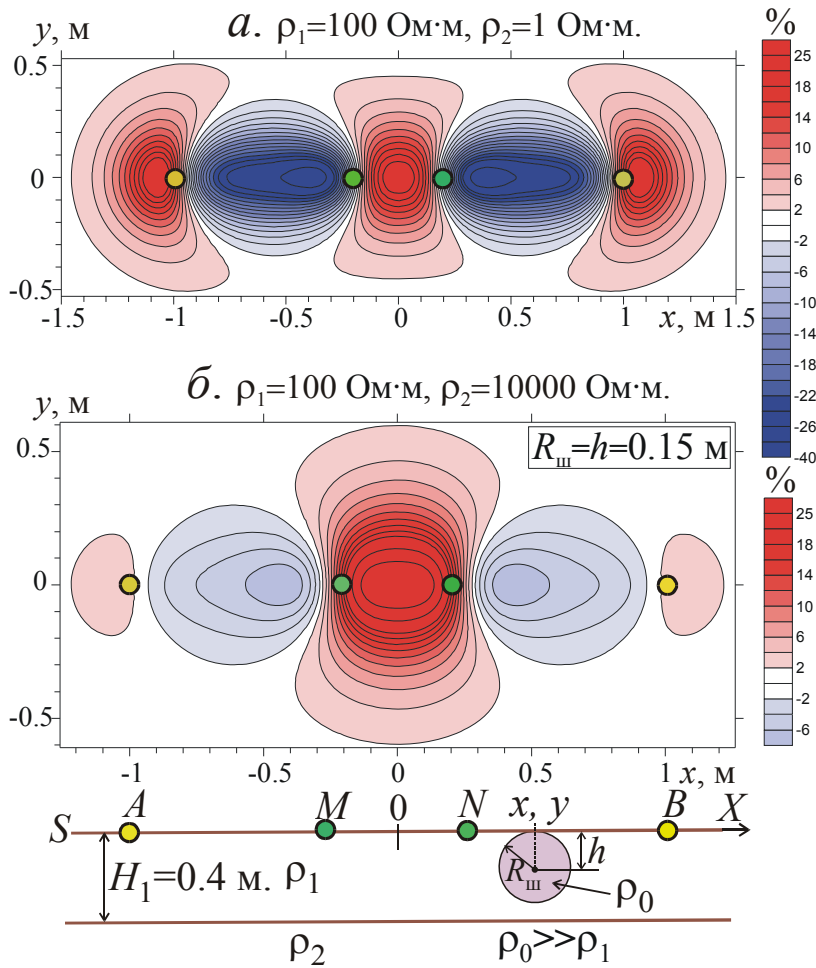
Представленные на **рис. 16, 17** результаты моделирования отвечают случаю, когда удельное электрическое сопротивление объекта  $V_i$   $\rho_0 \gg \rho_1$ . При этом в выражениях (1) множитель  $C \approx -0.5$  Красным цветом на **рис. 16, 17** показаны те

части плоскости  $S$ , на которых значения  $\delta\rho_k \geq 2\%$  и присутствие объекта  $V_i$  приводит к увеличению  $\rho_k$ . На участках плоскости  $S$ , окрашенных синим цветом,

$\delta\rho_k \leq -2\%$  и при расположении эпицентра  $V_i$  в пределах таких участков присутствие объекта ведёт к уменьшению  $\rho_k$ .

При  $\rho_0 < \rho_1$  и положительном значении множителя  $C$  в равенствах (1) значения  $\delta\rho_k$  на картах имели бы противоположный знак (и иную абсолютную величину) по сравнению с теми, которые показаны на рис. 16, 17.

На рис. 16 приведены две карты, показывающие относительное влияние объекта  $V_i$  на величину  $\rho_k$  при измерениях с установкой Шлюмберже и расположении  $V_i$  в верхнем слое (с  $\rho = \rho_1$ ) двухслойной модели среды. На этом рисунке видно, что максимальное (осложняющее интерпретацию результатов измерений) влияние локальной приповерхностной неоднородности проявляется в тех случаях, когда эпицентр объекта  $V_i$  расположен на

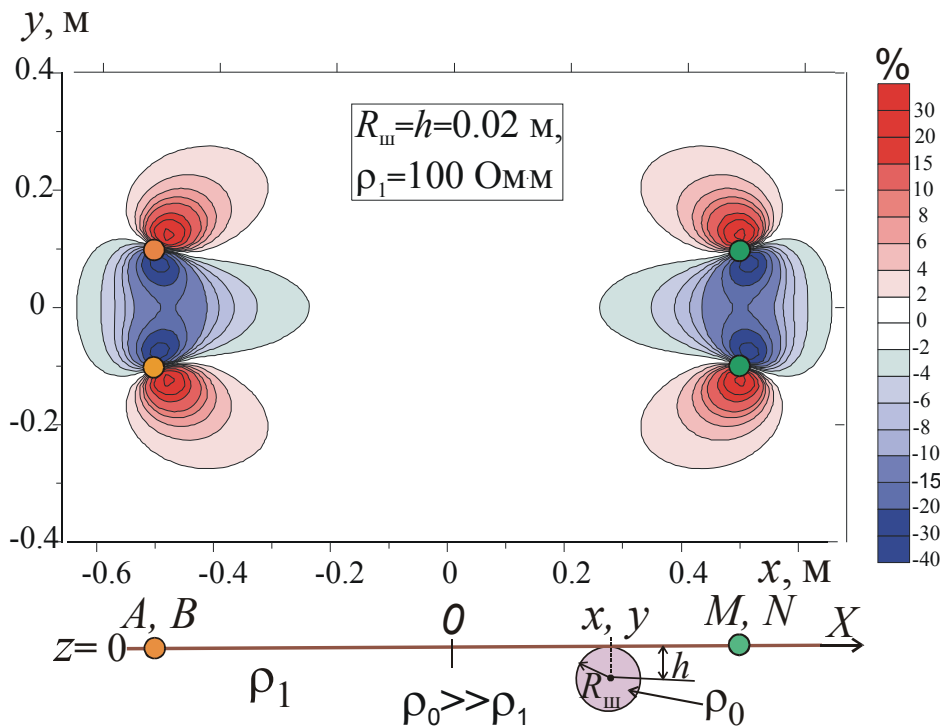


**Рис. 16.** Зависимость относительного влияния  $\delta\rho_k$  расположенного в первом слое 2-х-слойной модели среды локального объекта  $V_i$  на  $\rho_k$  от положения эпицентра  $V_i$  относительно электродов. Установка Шлюмберже

небольшом расстоянии от отрезка прямой, на котором лежат электроды  $A, M, N, B$ .

Обратим внимание на то, что при прочих одинаковых условиях, в случае, если  $\rho_2 \ll \rho_1$  (рис. 16, а) относительное влияние объекта  $V_i$  на  $\rho_k$  проявляется в большей степени, чем при  $\rho_2 \gg \rho_1$  (рис. 16, б), особенно при положении эпицентра  $V_i$  между токовым и измерительным электродами. О причинах этого было сказано выше, при рассмотрении результатов моделирования на рис. 15.

На рис. 17 приведена карта, показывающая относительное влияние  $\delta\rho_k$  расположенного в однородном проводящем полупространстве объекта  $V_i$  на значения  $\rho_k$  при проведении измерений с дипольно-экваториальной установкой (ДЭУ). На этом рисунке видим, что при измерениях с ДЭУ присутствие приповерхностного локального объекта  $V_i$  может оказывать значительное (относительное) влияние  $\delta\rho_k$  на величину  $\rho_k$  лишь в тех случаях, когда эпицентр  $V_i$  расположен вблизи токового диполя  $AB$  или измерительного диполя  $MN$ .



**Рис. 17.** Зависимость относительного влияния расположенного в однородном проводящем полупространстве локального объекта  $V_i$  на  $\rho_k$  от положения эпицентра  $V_i$  относительно электродов. Дипольно- экваториальная установка

Если эпицентр объекта  $V_i$  расположен между центрами диполей  $AB$  и  $MN$  на расстоянии от диполей в 1.5 - 2 раза превышающем длины диполей  $AB$  и  $MN$ , то присутствие имеющей малые размеры приповерхностной локальной неоднородности практически не оказывает влияния на результаты измерений с дипольно- экваториальной установкой.

## 2.4. Влияние различных по форме объектов на результаты метода сопротивлений

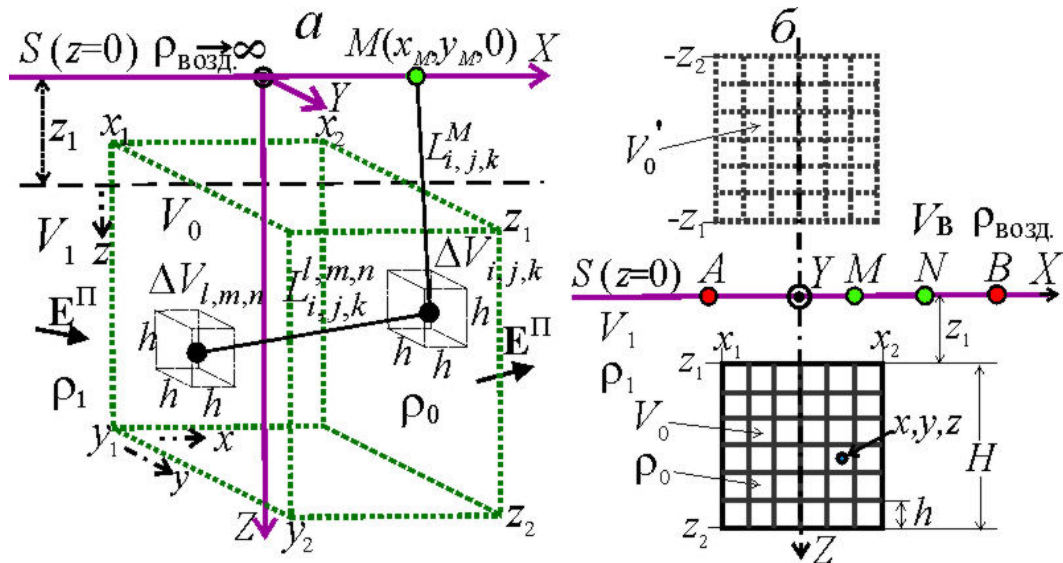
### 2.4.1. Методика расчётов

В этом разделе описан применённый нами алгоритм расчётов и приведены результаты математического моделирования для нескольких модификаций метода сопротивлений в случаях, когда на результаты этого метода оказывает влияние расположенный в проводящем полупространстве с удельным электрическим сопротивлением  $\rho=\rho_1$  имеющий конечные размеры объект  $V_0$  с  $\rho=\rho_0$ . Обусловленное присутствием такого объекта  $V_0$  вторичное электрическое поле  $\mathbf{E}^B$  можно представить суммой полей, создаваемых множеством ("заполняющих" область  $V_0$ ) малых элементов  $\Delta V$  с дипольными моментами  $\Delta \mathbf{p}$ . В применённом нами алгоритме расчётов предусмотрен учёт влияния дипольных моментов  $\Delta \mathbf{p}$  элементов  $\Delta V$ , как источников вторичного поля  $\mathbf{E}^B$ , на дипольные моменты  $\Delta \mathbf{p}$  других элементов  $\Delta V$ .

Из выражений (1), (3) следует, что абсолютная величина  $\Delta p=|\Delta \mathbf{p}|$  дипольного момента  $\Delta \mathbf{p}$  пропорциональна  $E^B$  и объёму, занимаемому элементом  $\Delta V$ . Множитель  $C$  в равенствах (1) может меняться в пределах от  $-0.5$  до  $1$ .

Далее рассмотрим применённую методику расчётов для случая, когда верхнее полупространство  $V_B$  с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_{\text{возд}}$  – изолятор, а в нижнем однородном проводящем полупространстве  $V_1$  с удельным

электрическим сопротивлением  $\rho_{\text{ВМ}}=\rho_1$  расположен объект  $V_0$  с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_0$ . В общем случае объект  $V_0$  может иметь



**Рис. 18.** Локальный объект  $V_0$  в форме куба в однородном проводящем полупространстве (а) и применение метода зеркальных изображений (б)

произвольную форму, но ниже уделим основное внимание случаям, когда объект  $V_0$  имеет форму куба с ребром  $H$  (либо шара с диаметром  $D$ ). В соответствии с обозначениями на рис. 18 ребро  $H$  объекта  $V_0$  в форме куба определяет выражение:  $H=(x_2-x_1)=(y_2-y_1)=(z_2-z_1)$ . На этом рисунке  $z_1$  – расстояние от верхней границы объекта  $V_0$  до плоской границы  $S(z=0)$  проводящего полупространства  $V_1$  с изолятором.

Как и ранее будем полагать, что источниками первичного стационарного электрического поля  $\mathbf{E}^{\text{П}}$  являются электрические заряды  $e_A, e_B$  точечных токовых электродов  $A, B$ . Если они расположены на плоской границе  $S$  проводящего полупространства с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_1$ , то заряды токовых электродов  $e_{A,B}=\pm 2\epsilon_0 \cdot \rho_1 \cdot I$ , где  $I$  – электрический ток в линии  $AB$ .

Представим расположенный в проводящем полупространстве  $V_1$  объект  $V_0$  как совокупность множества элементов  $\Delta V$  в форме имеющих малые размеры кубов с ребрами  $h$ , параллельными осям  $X, Y, Z$  декартовых координат, и с объёмами  $h^3$  (см. рис. 18, а). Размеры  $h$  элементов  $\Delta V$  должны быть достаточно малыми для того, чтобы (с удовлетворительной точностью) можно было допустить, что в пределах каждого элемента  $\Delta V$  первичное поле  $\mathbf{E}^{\text{П}}$  однородно.

Для двух таких произвольных элементов применим следующие обозначения. У одного из них –  $\Delta V_{i,j,k}$ , координаты центра:  $x_i, y_j, z_k$ , а у другого элемента –  $\Delta V_{l,m,n}$  координаты центра:  $x_l, y_m, z_n$ . В "нулевом приближении" создаваемое каждым таким элементом  $\Delta V$  вторичное поле  $\mathbf{E}^{\text{В}}$  можно аппроксимировать полем электрического диполя с моментом  $\mathbf{p}^0 = F \cdot \mathbf{E}^{\text{П}}$ , где согласно (1)  $F$  зависит от  $\rho_0, \rho_1$  и объёма элемента  $\Delta V$ .

Декартовы компоненты создаваемого (при помощи токовых электродов  $A, B$ ) первичного поля  $\mathbf{E}^{\text{П}}$  в центрах  $x_i, y_j, z_k$ , или  $x_l, y_m, z_n$ , малых элементов  $\Delta V$

обозначим соответственно  $E_x^n(i, j, k)$ ,  $E_y^n(i, j, k)$ ,  $E_z^n(i, j, k)$ , или  $E_x^n(l, m, n)$ ,  $E_y^n(l, m, n)$ ,  $E_z^n(l, m, n)$ . Тогда в "нулевом приближении" соответствующие компоненты дипольных моментов этих элементов  $\Delta V$  определяют выражения:  $p_x^0(i, j, k) = F \cdot E_x^n(i, j, k)$ ,  $p_y^0(i, j, k) = F \cdot E_y^n(i, j, k)$ ,  $p_z^0(i, j, k) = F \cdot E_z^n(i, j, k)$  или  $p_x^0(l, m, n) = F \cdot E_x^n(l, m, n)$ ,  $p_y^0(l, m, n) = F \cdot E_y^n(l, m, n)$ ,  $p_z^0(l, m, n) = F \cdot E_z^n(l, m, n)$ . В соответствии с выражениями (4) можем представить потенциал вторичного поля в центре элемента  $\Delta V_{l,m,n}$ , обусловленного влиянием элемента  $\Delta V_{i,j,k}$  в следующем виде:

$$U^0(l, m, n) = U_x^0(l, m, n) + U_y^0(l, m, n) + U_z^0(l, m, n), \text{ где}$$

$$U_x^0(l, m, n) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_x^0(i, j, k) \cdot \cos(\mathbf{p}_x^0, \mathbf{L}_{l,m,n}^{i,j,k})}{(L_{l,m,n}^{i,j,k})^2}, \quad \cos(\mathbf{p}_x^0, \mathbf{L}_{l,m,n}^{i,j,k}) = \frac{x_l - x_i}{L_{l,m,n}^{i,j,k}},$$

$$U_y^0(l, m, n) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_y^0(i, j, k) \cdot \cos(\mathbf{p}_y^0, \mathbf{L}_{l,m,n}^{i,j,k})}{(L_{l,m,n}^{i,j,k})^2}, \quad \cos(\mathbf{p}_y^0, \mathbf{L}_{l,m,n}^{i,j,k}) = \frac{y_m - y_j}{L_{l,m,n}^{i,j,k}},$$

$$U_z^0(l, m, n) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_z^0(i, j, k) \cdot \cos(\mathbf{p}_z^0, \mathbf{L}_{l,m,n}^{i,j,k})}{(L_{l,m,n}^{i,j,k})^2}, \quad \cos(\mathbf{p}_z^0, \mathbf{L}_{l,m,n}^{i,j,k}) = \frac{z_n - z_k}{L_{l,m,n}^{i,j,k}},$$

где  $L_{l,m,n}^{i,j,k} = \sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_m - y_j)^2 + (z_n - z_k)^2}$ ,  $\mathbf{p}_{x,y,z}^0$  – векторные компоненты дипольных моментов, а  $\mathbf{L}$  – соответствующие радиус-векторы. Пользуясь такими равенствами, можно было бы (путём суммирования) определить потенциал  $U^B(M)$ ,  $U^B(N)$  вторичного (аномального) поля  $\mathbf{E}^B$  в точках наблюдения  $M, N$  на границе  $S$  проводящего полупространства (см. рис. 18), обусловленного влиянием объекта  $V_0$ .

Однако приведенные выше выражения не учитывают того, что фактически дипольные моменты  $\mathbf{p}$  элементов  $\Delta V$  зависят не от поля  $\mathbf{E}^n$ , а от суммарного поля  $\mathbf{E}$ , а в поле  $\mathbf{E}$  "вносят вклад" все элементы  $\Delta V$  ( $\Delta V_{i,j,k}$ ,  $\Delta V_{l,m,n}$  и т. д.) из которых состоит объект  $V_0$ . Чтобы учесть взаимное влияние электрического поля элементов  $\Delta V_{i,j,k}$ ,  $\Delta V_{l,m,n}$ , мы применили при разработке алгоритмов расчётов метод итераций (последовательных приближений). Суть применённого подхода состоит в следующем.

Пусть в "нулевом приближении" потенциалы вторичного поля в центрах элементов  $\Delta V_{l,m,n}$ , создаваемого "диполями" в центрах элементов  $\Delta V_{i,j,k}$  определяют приведенные выше выражения для  $U^0(l, m, n) = U_x^0(l, m, n) + U_y^0(l, m, n) + U_z^0(l, m, n)$ . Тогда, в "первом приближении", например,  $x$ -компоненту вторичного электрического поля  $\mathbf{E}^{B(1)}(l, m, n)$  в центре каждого элемента  $\Delta V_{l,m,n}$ , обусловленного влиянием произвольного элемента  $\Delta V_{i,j,k}$ , можем определить следующим образом:  $E_x^{B(1)}(l, m, n) = E_{xx}^{B(1)}(l, m, n) + E_{yx}^{B(1)}(l, m, n) + E_{zx}^{B(1)}(l, m, n)$ . В правой части этого

выражении для составляющих  $E_x^{B(1)}(l, m, n)$  второй нижний индекс отвечает компоненте поля  $\mathbf{E}^{B(1)}(l, m, n)$ , а первый нижний индекс – компоненте дипольного момента  $\mathbf{p}^0(i, j, k)$ . Для определения слагаемых в правой части выражения для компоненты  $E_x^{B(1)}(l, m, n)$  нужно было вычислить частные производные приведенных выше выражений для потенциалов  $U^0(l, m, n)$ . Например, для компоненты  $E_x^{B(1)}(l, m, n)$  слагаемое

$$\begin{aligned} E_{xx}^{B(1)}(l, m, n) &= -\frac{\partial U_x^0(l, m, n)}{\partial x_l} = -\frac{p_x^0(i, j, k)}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{x_l - x_i}{\left(L_{l, m, n}^{i, j, k}\right)^3} = \\ &= \frac{p_x^0(i, j, k)}{4\pi\epsilon_0 \left(L_{l, m, n}^{i, j, k}\right)^5} \cdot \left[ 2(x_l - x_i)^2 - (y_m - y_j)^2 - (z_n - z_k)^2 \right]. \end{aligned}$$

Аналогичным образом для двух других слагаемых в правой части выражения для компоненты  $E_x^{B(1)}(l, m, n)$  получаем:  $E_{yx}^{B(1)}(l, m, n) = \frac{p_y^0(i, j, k)}{4\pi\epsilon_0 \left(L_{l, m, n}^{i, j, k}\right)^5} \cdot \left[ 3(x_l - x_i)(y_m - y_j) \right]$ ,

$$E_{zx}^{B(1)}(l, m, n) = \frac{p_z^0(i, j, k)}{4\pi\epsilon_0 \left(L_{l, m, n}^{i, j, k}\right)^5} \cdot \left[ 3(x_l - x_i)(z_n - z_k) \right].$$

Понятно, что скалярные декартовы компоненты поля  $\mathbf{E}^{B(1)}(l, m, n)$  определяют 9 выражений подобного вида.

Вычислив компоненты вторичного поля  $\mathbf{E}^{B(1)}(l, m, n)$  (и  $\mathbf{E}^{B(1)}(i, j, k)$ ) во всех центрах элементов  $\Delta V_{l, m, n}$ ,  $\Delta V_{i, j, k}$  и суммируя эти компоненты поля в центре каждого элемента  $\Delta V$  (если  $\Delta V_{l, m, n}$  и  $\Delta V_{i, j, k}$  – не один и тот же элемент), можем определить в "первом приближении" компоненты суммарного поля  $\mathbf{E}^{(1)}(l, m, n) = \mathbf{E}^n(l, m, n) + \mathbf{E}^{B(1)}(l, m, n)$  и  $x, y, z$  – составляющие дипольных моментов  $\mathbf{p}^{(1)}(l, m, n) = F \cdot \mathbf{E}^{(1)}(l, m, n) = F \cdot \left( \mathbf{E}^n(l, m, n) + \mathbf{E}^{B(1)}(l, m, n) \right)$  всех малых элементов  $\Delta V_{l, m, n}$ , из которых состоит объект  $V_0$ . Теперь можем вычислить в "первом приближении" потенциалы  $U^{(1)}(l, m, n) = U^n(l, m, n) + U^{B(1)}(l, m, n)$  суммарного и вторичного полей каждого малого элемента  $\Delta V_{l, m, n}$ .

Затем, в соответствии с применённым методом последовательных приближений, можем перейти к следующей итерации. Это требует вычисления (в центрах всех малых объёмов  $\Delta V_{l, m, n}$ ) значений компонент поля  $\mathbf{E}^{B(2)}(l, m, n)$  ("во втором приближении"), составляющих дипольных моментов  $\mathbf{p}^{(2)}(l, m, n) = F \cdot \mathbf{E}^{(2)}(l, m, n) = F \cdot \left( \mathbf{E}^n(l, m, n) + \mathbf{E}^{B(2)}(l, m, n) \right)$  и т. д. Критерием того, что при вычислениях итерационный процесс можно закончить, служит, конечно, то, что максимальное различие дипольных моментов элементов  $\Delta V$ , полученных при последней и предпоследней итерациях – много меньше, чем требуемая погрешность расчётов.

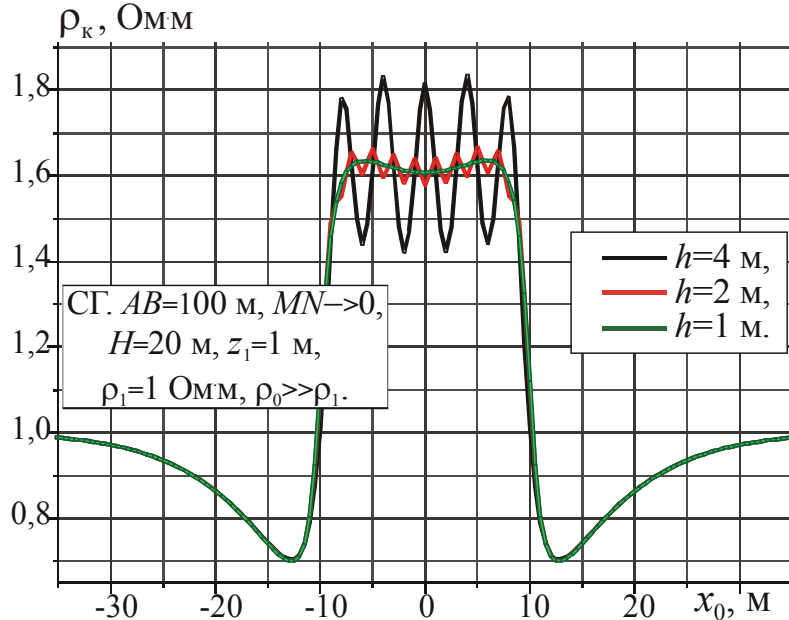
**Рис. 18, б** служит иллюстрацией того, как метод зеркальных изображений был применён при разработке алгоритма расчёта влияния объекта  $V_0$  на результаты



метода сопротивлений в присутствии границы  $S$  проводящего полупространства. При этом требовало учёта взаимное влияние множества малых элементов  $\Delta V$ , заполняющих не только область  $V_0$  в проводящем полупространстве, но и область  $V_0'$  в верхнем полупространстве  $V_B$  (см. рис. 18, б). Эти две области  $V_0$  и  $V_0'$  имеют одинаковые пределы изменения координат  $x, y$ , но разные по знаку пределы изменения

координаты  $z$ .

Вопрос о том, насколько малыми при расчётах для той или иной модели должны быть размеры  $h$  элементов  $\Delta V$  не сложно было решить на основе численных экспериментов. На рис. 19 сопоставлены кривые профилирования для установки метода срединного градиента (СГ) над расположенным в однородном проводящем полупространстве объектом в форме куба с ребром  $H=20$  м в случаях, когда рёбра малых элементов  $\Delta V$  в форме кубов имеют следующие значения:  $h=4$  м,  $h=2$  м и  $h=1$  м. На этом



**Рис. 19.** Кривые профилирования для установки срединного градиента над объектом в форме куба при разных значениях  $h$

рисунке видно, что при заданных параметрах модели среды и электроразведочной установки при значениях  $h=4$  м и  $h=2$  м на кривой профилирования проявляются "осложнения", обусловленные недостаточно малой величиной  $h$ . При  $h=1$  м кривые профилирования таких осложнений не имеют. Анализ подобных результатов расчётов показал, что при выборе размеров  $h$  элементов  $\Delta V$ , необходимо учитывать в первую очередь то, какова глубина  $z_1$  от верхней границы объекта  $V_0$  до границы  $S$  проводящего полупространства.

Результаты вычислений позволяют определить компоненты  $p_x(i, j, k)$ ,  $p_y(i, j, k)$ ,  $p_z(i, j, k)$  дипольных моментов  $\mathbf{p}(i, j, k)$  всех малых элементов  $\Delta V_{i,j,k}$ , из которых состоит объект  $V_0$  и его "отражение"  $V_0'$  в плоскости  $S$ . При известных компонентах всех дипольных моментов элементов  $\Delta V_{i,j,k}$ , совсем не сложно определить в произвольной точке проводящего полупространства декартовы компоненты вторичного (аномального) электрического поля  $\mathbf{E}^B$ , обусловленного присутствием объекта  $V_0$ . Можем определить также потенциалы  $U^B$  вторичного поля  $\mathbf{E}^B$  в произвольных точках проводящего полупространства и, в частности, потенциалы  $U^B(M)$ ,  $U^B(N)$  в тех точках на плоскости  $S$ , где расположены точечные измерительные электроды  $M, N$ .

Например, потенциал вторичного поля в точке  $M$  определяют следующие выражения:

$$U^B(M) = \Sigma [U_x^B(M) + U_y^B(M) + U_z^B(M)], \quad U_x^B(M) = \frac{p_x(i,j,k)}{4\pi\epsilon_0(L_{i,j,k}^M)^3} \cdot (x_M - x_{i,j,k}),$$

$$U_y^B(M) = \frac{p_y(i,j,k)}{4\pi\epsilon_0(L_{i,j,k}^M)^3} \cdot (y_M - y_{i,j,k}), \quad U_z^B(M) = \frac{p_z(i,j,k)}{4\pi\epsilon_0(L_{i,j,k}^M)^3} \cdot (-z_{i,j,k}).$$

В последнем равенстве учтено, что у расположенного на поверхности проводящего полупространства измерительного электрода  $M$  координата  $z_M=0$ . У составляющих потенциалов  $U^B$  вторичного поля  $\mathbf{E}^B$  индексы  $x, y, z$  отвечают соответствующим компонентам  $p_{x,y,z}$  дипольных моментов  $\mathbf{p}$  элементов  $\Delta V_{i,j,k}$ .

Понятно, что потенциалы суммарного электрического поля в точках  $M, N$ :  $U(M)=U^П(M)+U^B(M)$ ,  $U(N)=U^П(N)+U^B(N)$ , где, например в точке  $M$ , потенциал первичного поля  $U^П(M)=(\rho_1 \cdot I/2\pi) \cdot (1/AM - 1/BM)$ . Соответственно разность потенциалов  $\Delta U_{MN}=U_M - U_N$ , а кажущееся удельное электрическое сопротивление  $\rho_K=K \cdot \Delta U_{MN}/I$ , где  $K$  – коэффициент электроразведочной установки.

#### 2.4.2. Результаты моделирования

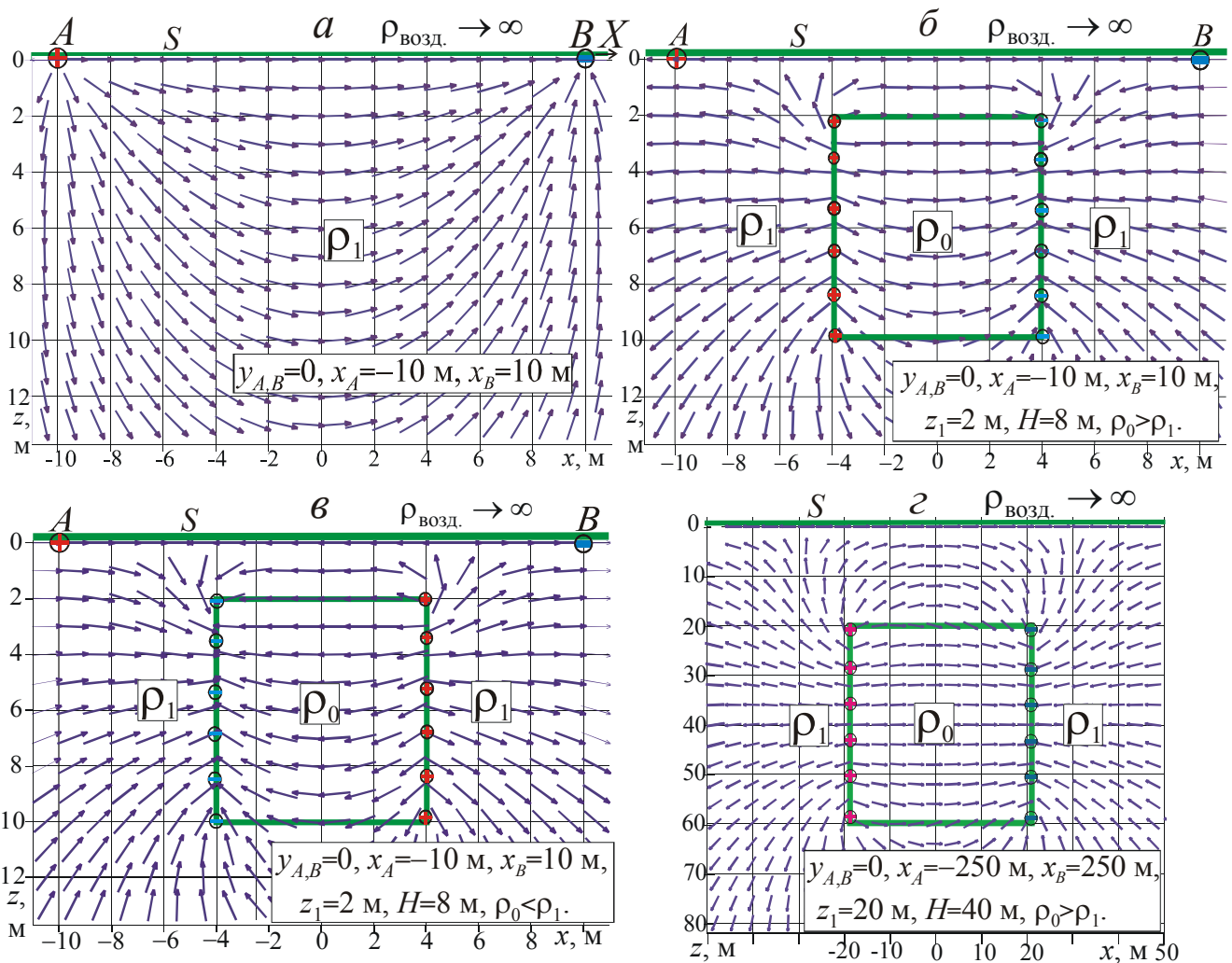
Рассмотрим сначала то, какое влияние может оказывать присутствие локального объекта  $V_0$  на направления векторов вторичного электрического поля  $\mathbf{E}^B$ . На **рис. 20, а** показаны направления векторов первичного электрического поля  $\mathbf{E}^П$  в вертикальной плоскости  $y=0$ , проходящей через токовые точечные электроды  $A, B$ . Заряды этих электродов ( $e_{A,B}=\pm 2\epsilon_0 \cdot \rho_1 \cdot I$ ) – источники первичного поля  $\mathbf{E}^П$ . Электроды  $A, B$  расположены на оси  $X$  декартовых координат, на плоской границе  $S$  между изолятором (верхнее полупространство с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_{\text{возд.}} \rightarrow \infty$ ) и проводящим полупространством.

Как уже было отмечено, в работе Л. М. Альпина [Альпин, 1947] было дано обоснование тому, что является источниками вторичного постоянного электрического поля  $\mathbf{E}^B$  в проводящей среде. Это – электрические заряды, индуцированные (при  $\mathbf{E} \neq 0$ ) в местах нарушения однородности среды по удельному электрическому сопротивлению  $\rho$ . В частности, если в проводящем полупространстве  $V_1$  (с  $\rho=\rho_1$ ) есть однородный объект  $V_0$  с  $\rho=\rho_0 \neq \rho_1$ , то при  $\mathbf{E}^П \neq 0$  на границе этого объекта (а также – и на границе  $S$  с изолятором) существуют индуцированные поверхностные заряды с поверхностными плотностями  $\Sigma^+$  и  $\Sigma^-$ . Эти заряды и являются источниками вторичного электрического поля  $\mathbf{E}^B$ , вследствие чего суммарное поле  $\mathbf{E}=\mathbf{E}^П+\mathbf{E}^B$  отличается от первичного поля  $\mathbf{E}^П$ .

На **рис. 20, б, в** показаны направления векторов  $\mathbf{E}^B$  в присутствии объектов  $V_0$  в форме куба. Центры объектов  $V_0$  лежат в плоскости  $y=0$ , а проекции этих центров на плоскость  $S$  совпадают с серединой отрезка  $AB$ . Результаты моделирования, показанные на **рис. 20, б** и **рис. 20, в**, отвечают случаям, когда соответственно  $\rho_0 > \rho_1$  и  $\rho_0 < \rho_1$ . В приведенных на этих рисунках моделях объекты  $V_0$  в форме куба имеют линейные размеры лишь в 2.5 раза меньше, чем расстояние между токовыми электродами  $A, B$ . При этих условиях, конечно, первичное поле  $\mathbf{E}^П$  в пределах объекта  $V_0$  – далеко не однородно и, в соответствии с изложенным

выше, обусловленное присутствием объекта  $V_0$  вторичное поле  $\mathbf{E}^B$  в области  $V_1$  и на границе  $S$  нельзя аппроксимировать полем двух электрических диполей в центрах объекта  $V_0$  и его отражения  $V_0'$  (см. рис. 18, б).

Но, если, как было описано в разделе 2.4.1, представить объекты  $V_0$  и  $V_0'$  как совокупность множества достаточно малых элементов  $\Delta V$ , в пределах каждого из которых поле  $\mathbf{E}^n$  близко к однородному, то мы можем вычислить поле  $\mathbf{E}^B$  путем суммирования полей множества диполей в центрах элементов  $\Delta V$ . Для учёта взаимного влияния полей  $\Delta \mathbf{E}^B$  элементов  $\Delta V$ , как было отмечено выше, был применён метод итераций.



**Рис. 20.** Направления векторов первичного поля  $\mathbf{E}^n$  (а) и векторов вторичного поля  $\mathbf{E}^B$  при  $\rho_0 > \rho_1$  (б), (г) и  $\rho_0 < \rho_1$  (в)

Сравнение результатов моделирования на рис. 20, а, б, в показывает следующее. При  $\rho_0 > \rho_1$  (рис. 20, б) над центром объекта  $V_0$  у границы  $S$  с изолятором направления векторов  $\mathbf{E}^B$  совпадают с направлениями векторов  $\mathbf{E}^n$  (рис. 20, а). Поэтому над центральной частью объекта  $V_0$  абсолютная величина суммарного поля  $|\mathbf{E}| = |\mathbf{E}^n + \mathbf{E}^B|$  больше, чем  $|\mathbf{E}^n|$ . Следствием этого являются, повышенные значения  $\Delta U_{MN}$  и кажущегося удельного электрического сопротивления  $\rho_k$  над центральной частью объекта  $V_0$ . При  $\rho_0 < \rho_1$  (рис. 20, в) над центром объекта  $V_0$  у границы  $S$  направления векторов  $\mathbf{E}^B$  противоположны

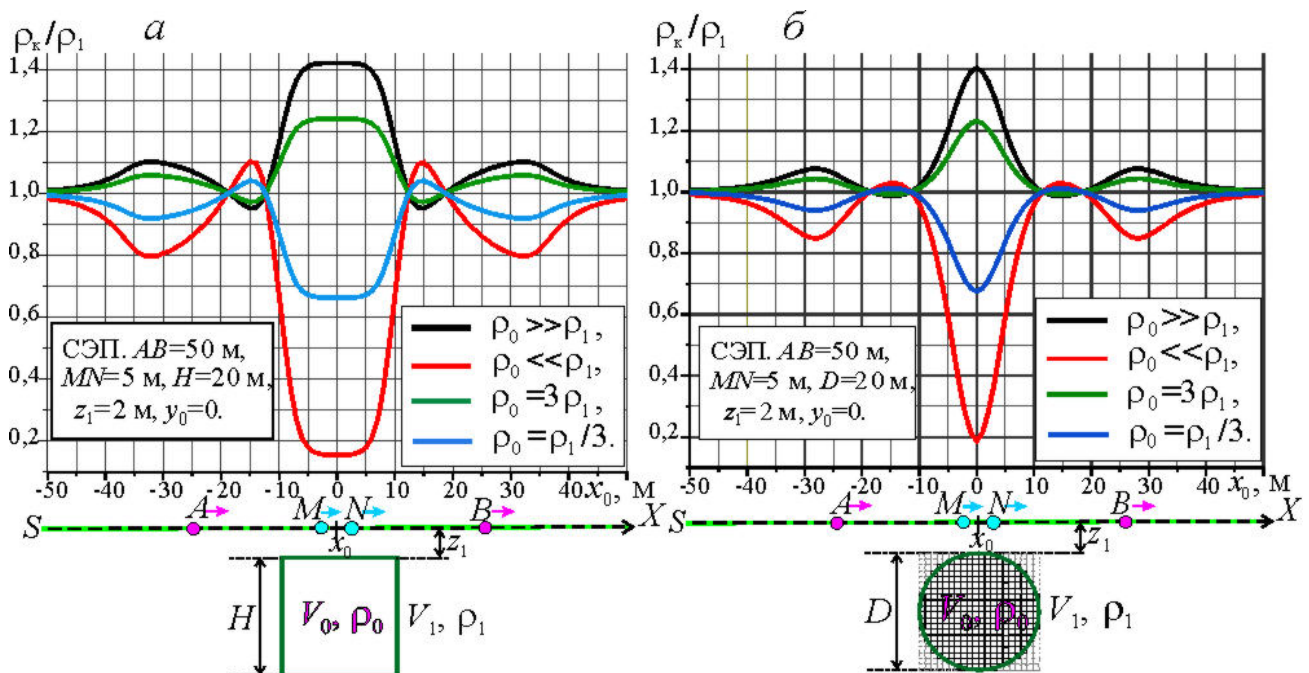
направлениям векторов  $\mathbf{E}^n$ , абсолютная величина  $|\mathbf{E}| = |\mathbf{E}^n + \mathbf{E}^b| < |\mathbf{E}^n|$ . Вследствие этого над таким объектом  $V_0$  величина  $\rho_k < \rho_1$ .

На рис. 20, з, как и на рис. 20, б, приведены результаты расчётов для случая, когда  $\rho_0 > \rho_1$ . Различие этих рисунков – в разносах токовых электродов  $A, B$ , размере рёбер  $H$  объектов  $V_0$  в форме куба и "глубине"  $z_1$  до их верхних границ. Видим, что и на рис. 20, з при  $\rho_0 > \rho_1$  над центральной частью  $V_0$  у границы  $S$  ("земля-воздух") поле  $\mathbf{E}^b$  направлено как  $\mathbf{E}^n$  ("вправо"). Следствием этого и являются более высокие значения  $\rho_k$  над объектом по сравнению с  $\rho_1$ .

Но заметим, что на некотором расстоянии от эпицентра объекта  $V_0$  у границы  $S$  направления векторов  $\mathbf{E}^b$  не такие, как над центром такого объекта. Это соответствующим образом должно сказываться на величинах  $\rho_k$ , что будет показано ниже.

Рассмотрим теперь полученные на основе приведенного выше метода расчёта результаты моделирования, иллюстрирующие то, какое влияние может оказывать присутствие имеющего изометричную форму объекта  $V_0$  в форме куба с ребром  $H$  (рис. 21, а, 22, 23), либо шара с диаметром  $D$  (рис. 21, б) на величину кажущегося удельного электрического сопротивления  $\rho_k$  в методах сопротивлений. Во всех приведенных на этих рисунках результатах моделирования координаты  $x, y$  центра объекта  $V_0$  равны нулю, а координата его центра  $z = z_1 + H/2$  (рис. 21, а, 22, 23), либо  $z = z_1 + D/2$  (рис. 21, б). Здесь  $z_1$  – минимальное расстояние от границы объекта  $V_0$  до границы  $S$  проводящего полупространства (см. рис. 18).

На рис. 21 показаны кривые кажущегося удельного электрического сопротивления  $\rho_k$  для установки симметричного электропрофилирования (СЭП)  $AMNB$  для случаев, когда объект  $V_0$  имеет форму куба с ребром  $H$  (рис. 21, а), либо шара с диаметром  $D$  (рис. 21, б). Точечные токовые электроды ( $A, B$ ) и



**Рис. 21.** Зависимости  $\rho_k/\rho_1$  от координаты  $x_0$  центра установки  $AMNB$  симметричного электропрофилирования над объектом  $V_0$  в форме куба (а) и шара (б)

измерительные электроды ( $M, N$ ) расположены на оси  $X$ , проходящей над центром объекта  $V_0$ .

Отметим, что результаты моделирования, приведенные, на [рис. 21, б](#), получены для случая, когда объект  $V_0$  фактически отличается по форме от "идеального" шара с диаметром  $D$  и с радиусом  $R_0=D/2$ . При численных расчётах на основе приведенного выше алгоритма было учтено влияние на поле  $\mathbf{E}^B$  и потенциалы  $U_M, U_N$  вторичного поля только тех имеющих малые размеры элементов  $\Delta V$  в форме куба с рёбрами  $h$ , заполняющих область  $V_0$ , расстояния от центров которых до центра объекта  $V_0$  меньше, чем радиус  $R_0$  такого объекта (см. [рис. 21, б](#)). Понятно, что при достаточно малых размерах  $h$  элементов  $\Delta V$  (см. [рис. 18](#)) по сравнению с радиусом  $R_0$ , такая совокупность элементов  $\Delta V$  может удовлетворительно аппроксимировать при расчётах влияние объекта  $V_0$  в форме шара. При сравнении [рис. 21, а](#) и [рис. 21, б](#) видно, что при небольшой глубине  $z_1$  до верхней границы объекта  $V_0$  и при показанной на этих рисунках размерах установки  $AMNB$  СЭП форма объекта  $V_0$  может оказывать значительное влияние на особенности кривых  $\rho_k$ .

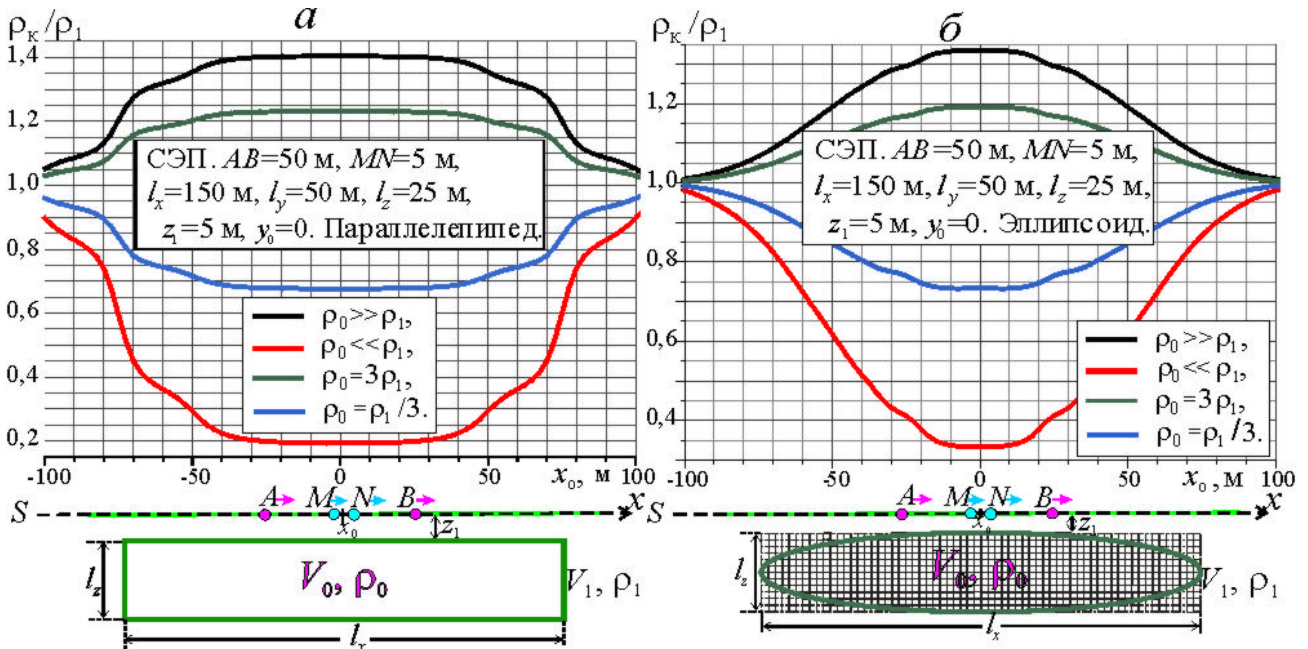
На кривых профилирования на [рис. 21](#), кроме экстремальных значений  $\rho_k$  над центрами объектов  $V_0$ , видны и другие экстремумы разного знака. Такие "осложнения" кривых  $\rho_k$  в работах [Бобачёв и др., 1995], [Электроразведка, 2005] названы С-эффектом. Эти "осложнения", конечно, обусловлены изменением распределения индуцированных на границе объекта  $V_0$  электрических зарядов, которое зависит от положения относительно этого объекта источников поля  $\mathbf{E}^n$  – зарядов токовых электродов  $A, B$ .

Примеры моделирования С-эффекта на основе результатов расчётов для имеющего малые размера объекта  $V_i$  были приведены выше, в разделе 2.3.1. На [рис. 21](#) видно то, как проявляется С-эффект при конечных размерах локального объекта  $V_0$ , соизмеримых с разносом токовых электродов  $A, B$ . Приведенные на этом рисунке результаты моделирования получены при линейных размерах объектов  $V_0$  в 2.5 раза меньших, чем расстояние между токовыми электродами  $A, B$ .

Результаты моделирования на [рис. 21](#) получены для имеющих изометричную форму объектов  $V_0$ . Кривые симметричного электропрофилирования с (перемещающейся по оси  $X$ ) установкой  $A\ 22.5\ M\ 5\ N\ 22.5\ B$  на [рис. 22](#) получены для объектов  $V_0$  в форме прямоугольного параллелепипеда и трёхосного эллипсоида вытянутых в направлении оси  $X$ . При получении результатов моделирования на [рис. 22, б](#) было учтено влияние на поле  $\mathbf{E}^B$  и потенциалы  $U_M, U_N$  вторичного поля  $\mathbf{E}^B$  только тех имеющих малые размеры элементов  $\Delta V$  в форме куба с рёбрами  $h$ , заполняющих область  $V_0$ , центры которых расположены внутри эллипсоида. Размеры осей эллипсоида  $l_x, l_y, l_z$  – те же, что длины соответствующих рёбер параллелепипеда. На [рис. 22](#) видим, что и при не изометричной форме объекта  $V_0$  не только размеры, но и особенности этой формы могут оказывать заметное влияние на результаты электрорпрофилирования.

При применённом подходе можем представить совокупностью элементов  $\Delta V$  имеющие разную форму объекты  $V_0$ . Это может позволить получить результаты

математического моделирования для определения влияния имеющих разную форму локальных объектов  $V_0$  на результаты метода сопротивлений. Такими могут быть объекты, изучаемые в инженерной геофизике, археологической геофизике и т. д. Для моделирования влияния объектов разной формы нужно просто "включить" в разработанные программы для компьютера нескольких логических операторов.



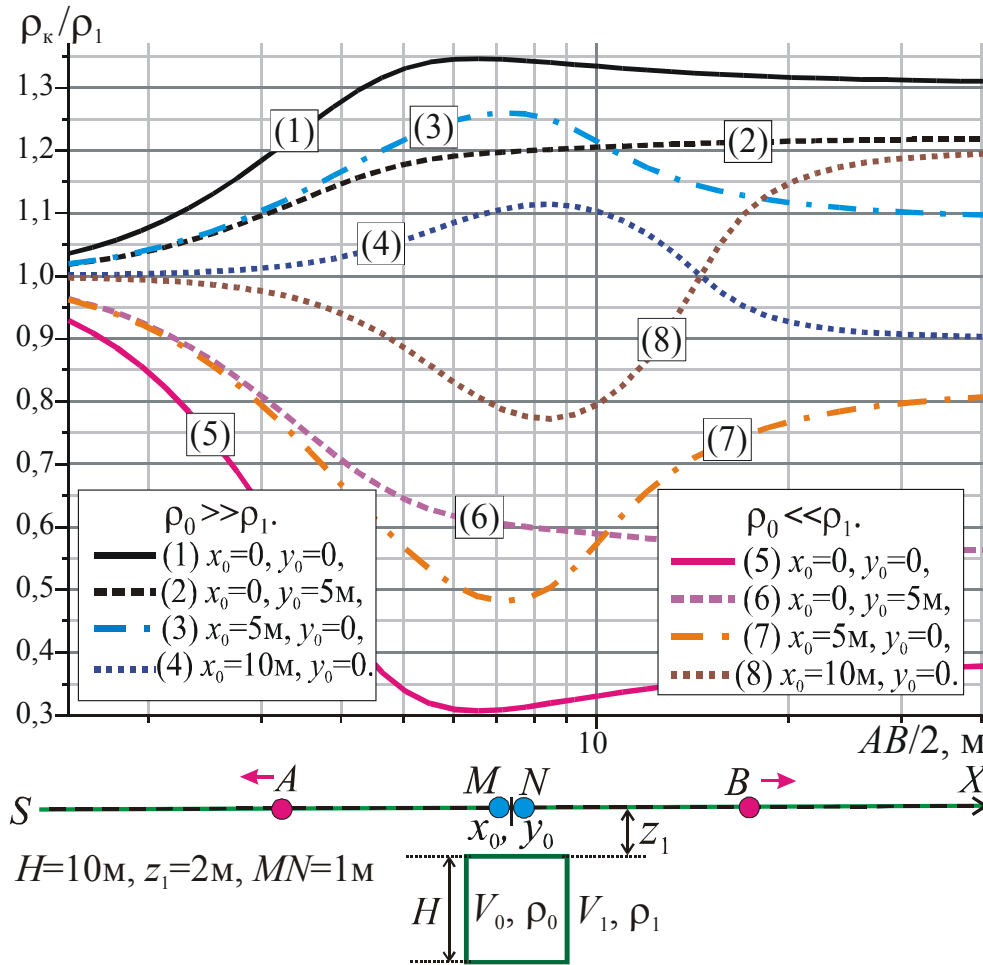
**Рис. 22.** Зависимости  $\rho_k/\rho_1$  от координаты  $x_0$  центра установки  $AMNB$  симметричного электропрофилеирования над объектом  $V_0$  в форме прямоугольного параллелепипеда (а) и трёхосного эллипсоида (б)

Рассмотрим теперь пример результатов моделирования для метода вертикальных электрических зондирований (ВЭЗ). На **рис. 23** приведены зависимости отношения  $\rho_k/\rho_1$  от "полуразноса"  $AB/2$  токовых электродов  $A, B$  для симметричной установки  $AMNB$ . Кривые зондирования получены при разных положениях эпицентра объекта  $V_0$  (координат  $x_0, y_0$ ) относительно центра установки  $AMNB$  с координатами  $x=0, y=0$ . Объект  $V_0$  с  $\rho=\rho_0$  имеет форму куба и расположен в однородном проводящем полупространстве с  $\rho=\rho_1$ . Установка  $AMNB$  лежит на оси  $X$ . На этом рисунке приведены кривые (1) - (4) для случая, когда  $\rho_0 \gg \rho_1$  и кривые (5) - (8) при  $\rho_0 \ll \rho_1$ .

Конечно, условиями, благоприятными для применения метода ВЭЗ (в его "классическом варианте") и количественной интерпретации результатов ВЭЗ, является субгоризонтальное залегание границ пластов, различающихся по удельному электрическому сопротивлению  $\rho$ . Но приведенные на **рис. 23** результаты расчётов получены для модели, у которой *единственным* нарушением однородности среды по удельному электрическому сопротивлению в проводящем полупространстве является присутствие локального объекта  $V_0$ .

На **рис. 23** видим, что при разных положениях эпицентра объекта  $V_0$  относительно центра зондирования кривые ВЭЗ могут иметь существенно различную форму. Зависимости (2), (6)  $\rho_k/\rho_1$  от  $AB/2$  на **рис. 23** подобны

"двухслойным" кривым зондирования, а остальные зависимости  $\rho_k/\rho_1$  от  $AB/2$  имеют вид, сходный с "трехслойными" кривыми ВЭЗ.



**Рис. 23.** Кривые ВЭЗ над объектом  $V_0$  в форме куба при разных положениях центра зондирования и отношении  $\rho_0/\rho_1$

При  $\rho_0 > \rho_1$  такие зависимости (1), (3), (4) подобны кривым типа  $K$ , а при  $\rho_0 < \rho_1$  зависимости (5), (7), (8) сходны с кривыми типа  $H$  для горизонтально-слоистой модели среды. Из приведенных на **рис. 23** результатов моделирования видно, что кривые зондирования в методе ВЭЗ в присутствии локального объекта  $V_0$ , расположенного в однородном

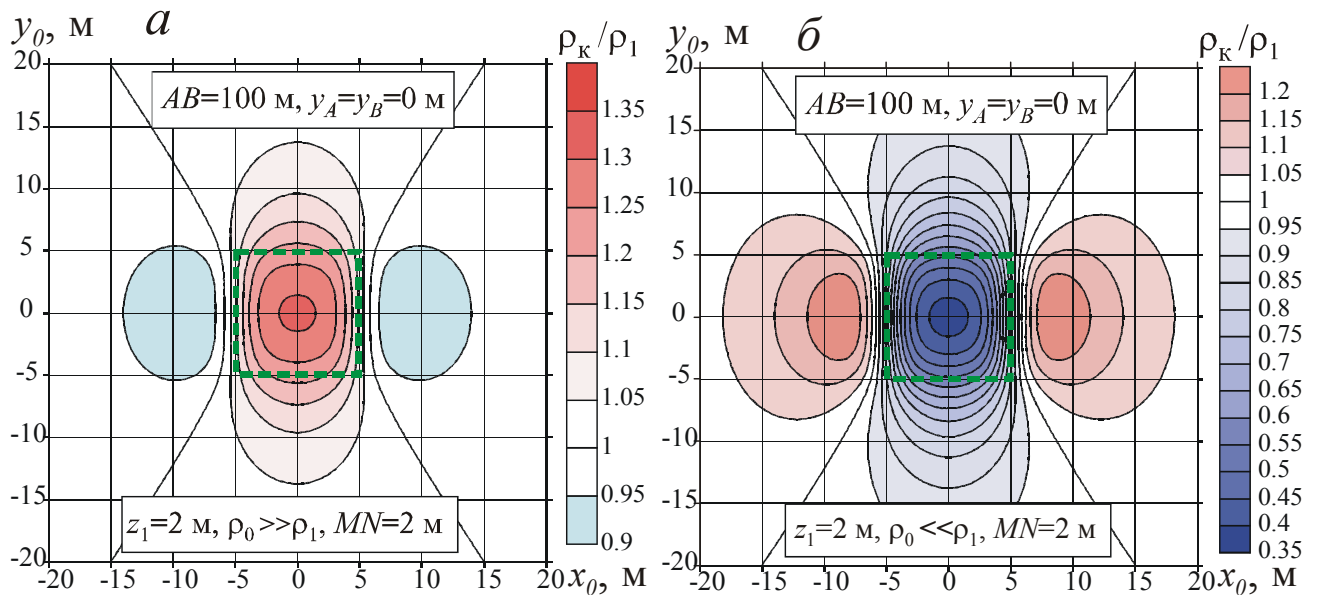
проводящем полупространстве, могут быть подобны по форме кривым ВЭЗ для горизонтально-слоистой среды.

На **рис. 24** показаны карты  $\rho_k/\rho_1$  для электроразведочной установки метода срединного градиента (СГ) в случае, когда центр ориентированной по оси  $X$  токовой линии  $AB$  совпадает с эпицентром объекта  $V_0$  в форме куба с ребром  $H=10$  м и удельным электрическим сопротивлением  $\rho=\rho_0$ , расположенного в однородном проводящем полупространстве с  $\rho=\rho_1$ .

Результаты моделирования на **рис. 24, а** приведены для случая, когда объект  $V_0$  имеет очень высокое удельное электрическое сопротивление по сравнению с вмещающей его средой ( $\rho_0 \gg \rho_1$ ). При этих условиях, конечно, над объектом  $V_0$  значения  $\rho_k$  выше, чем  $\rho_1$ . Вне проекции  $V_0$  на плоскость  $S$  на этой плоскости есть области, где (при  $\rho_0 \gg \rho_1$ ) значения  $\rho_k$  меньше, чем  $\rho_1$ .

Карта  $\rho_k/\rho_1$  для метода СГ, приведенная на **рис. 24, б**, отличается от предыдущей (**рис. 24, а**) тем, что она получена для случая, когда объект  $V_0$  имеет очень низкое значение удельного электрического сопротивления по сравнению с вмещающей его средой ( $\rho_0 \ll \rho_1$ ). В этом случае над частью плоскости  $S$ ,

несколько превышающей площадь проекции объекта  $V_0$  на эту плоскость, мы, конечно, наблюдаем пониженные (по сравнению с  $\rho_1$ ) значения  $\rho_k$ . Вне проекции  $V_0$  на плоскость  $S$  на этой плоскости есть области, в пределах которых (при  $\rho_0 \ll \rho_1$ )  $\rho_k > \rho_1$ .



**Рис. 24.** Карты  $\rho_k/\rho_1$ , установка СГ

В некоторых публикациях, имеющих отношение к рассматриваемой здесь тематике, "осложнения" аномалий  $\rho_k$  методе СГ в присутствии объекта  $V_0$  (проявляющиеся в том, что разность  $\rho_k - \rho_1$  имеет разный знак над объектом и в некоторых других частях плоскости  $S$ ) названы "эффектом сопряжённых аномалий". При физическом истолковании этого эффекта в этих работах речь идёт об особенностях "обтекания" отличающегося по удельному электрическому сопротивлению  $\rho$  от вмещающей среды объекта электрическим током, или "втекания" тока в такой объект. Но, как уже было отмечено выше, ещё много лет назад в основополагающей работе Л. М. Альпина [Альпин, 1947] было показано, что фактически влияние неоднородностей по  $\rho$  в проводящей среде на стационарное поле  $\mathbf{E}$  и, следовательно, на величину  $\rho_k$ , обусловлено вторичным полем  $\mathbf{E}^B$  зарядов, индуцированных в местах нарушения однородности среды по удельному электрическому сопротивлению  $\rho$ .

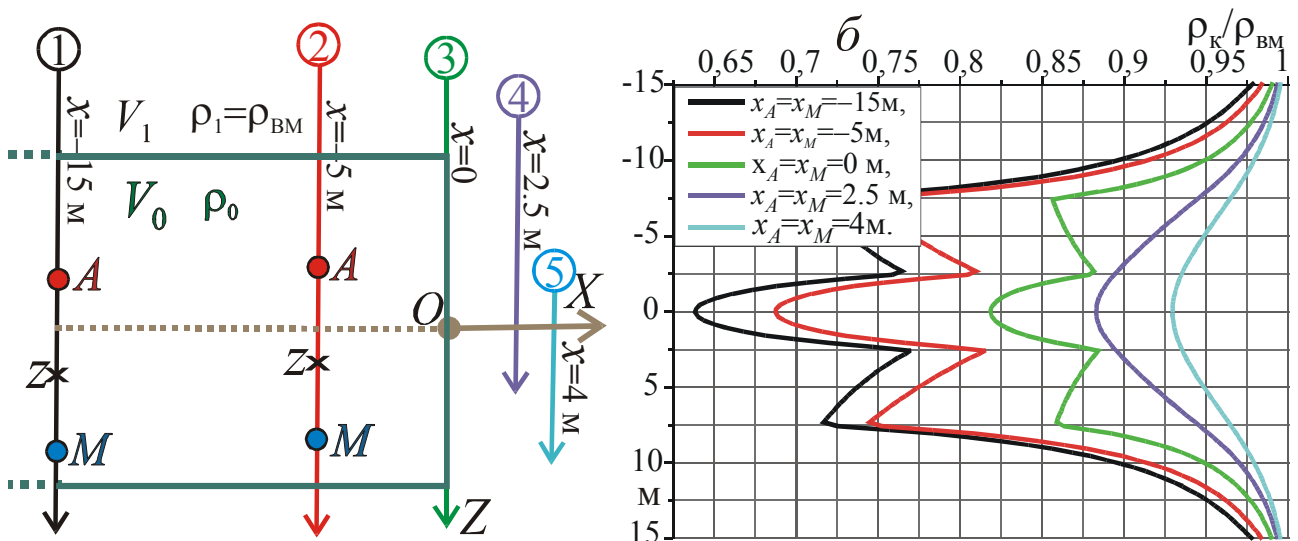
Одной из иллюстраций, показывающей справедливость таких представлений, является **рис. 20**. В частности, на **рис. 20, б, г** видим, что при  $\rho_0 > \rho_1$  (в вертикальной плоскости, проходящей через центр объекта  $V_0$  и электроды  $A, B$ ) над объектом у границы  $S$  с изолятором векторы  $\mathbf{E}^B$  направлены как  $\mathbf{E}^H$ . Вследствие этого у этой границы  $|\mathbf{E}| > |\mathbf{E}^H|$  и  $\rho_k > \rho_1$ . Но при удалении от  $V_0$  у этой границы векторы  $\mathbf{E}^B$  меняют направление на противоположное и, соответственно, при этом  $|\mathbf{E}| < |\mathbf{E}^H|$  и  $\rho_k < \rho_1$ .



### 3. Влияние локальных объектов на результаты каротажа сопротивлений

Одной из важных задач, которую должны решать геофизические методы на стадии разведки некоторых рудных месторождений, является обнаружение проводящих "слепых" рудных тел – объектов с низким удельным электрическим сопротивлением, не пройденных (не "вскрытых") скважинами. В этом разделе приведены полученные на основе применённой нами методики моделирования примеры результатов расчётов для потенциал-зонда и градиент-зонда каротажа сопротивления (КС). Данные моделирования получены без учёта влияния скважины на результаты КС.

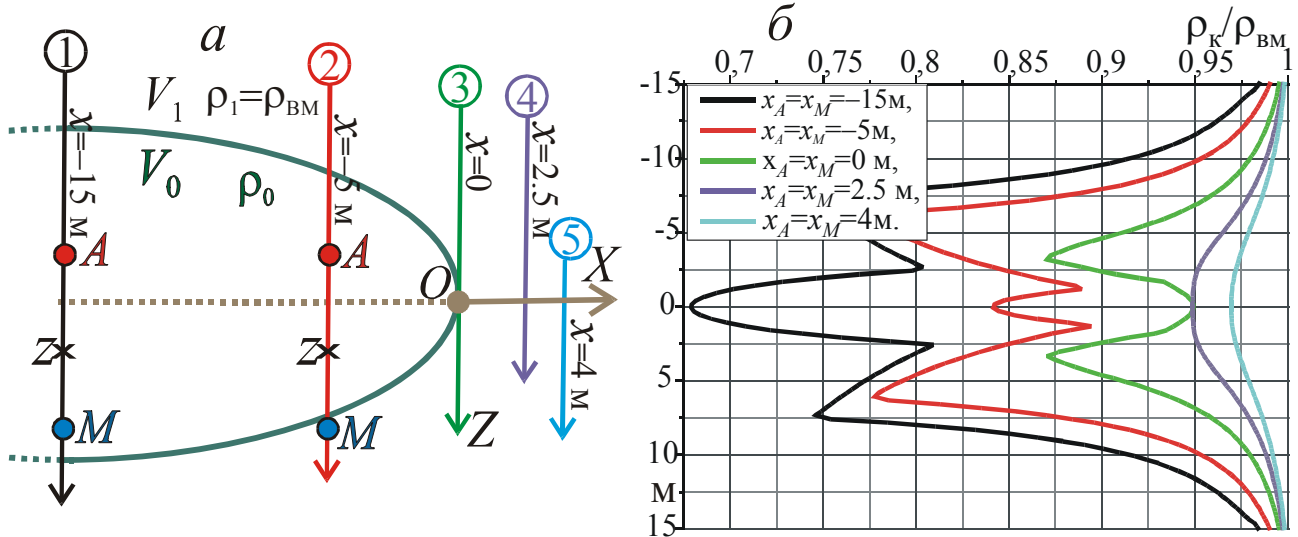
Расчётные материалы приведены для случаев, когда объект  $V_0$  с очень низким удельным электрическим сопротивлением  $\rho_0$  (по сравнению с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_1 = \rho_{\text{вм}}$  вмещающей этот объект среды) имеет форму прямоугольного параллелепипеда с горизонтальными рёбрами  $l_x = l_y = 30$  м, и с вертикальным ребром  $l_z = 10$  м, либо вписанного в такой параллелепипед эллипсоида вращения. Ниже на рисунках показаны "правые половины" сечения этих объектов  $V_0$  плоскостью  $y=0$ . Точнее, результаты расчётов, приведенные на [рис. 26, 28](#), получены для случая, когда объект  $V_0$  не "тождественен" эллипсоиду, а близок по форме к эллипсоиду, вписанному в параллелепипед с указанными выше размерами. Фактически же объект  $V_0$  отличается по форме от "идеального" эллипсоида. При численных расчётах было учтено влияние на потенциалы  $U_M, U_N$  измерительных электродов  $M, N$  вторичных полей  $\Delta E^B$  только тех, заполняющих объект  $V_0$  и имеющих малые размеры элементов  $\Delta V$  в форме куба, центры которых лежат в области, ограниченной поверхностью эллипсоида (см. [рис. 22, б](#)).



**Рис. 25.** Кривые  $\rho_k/\rho_{\text{вм}}$  для потенциал-зонда КС.  
Зонд А5М ( $AM=5$  м),  $l_x=l_y=30$  м,  $l_z=10$  м,  $\rho_0 \ll \rho_{\text{вм}}$

На [рис. 25 - 28](#) представлены результаты моделирования для случаев, когда зонды КС, пересекают объект  $V_0$ , "касаются" его, либо проходят по вмещающей среде на некотором расстоянии от этого объекта. Приведены графики отношения

$\rho_k/\rho_{\text{вм}}$ , где  $\rho_k$  – кажущееся удельное электрическое сопротивление, а  $\rho_1=\rho_{\text{вм}}$  – удельное электрическое сопротивление вмещающей объект  $V_0$  среды. Как и ранее,  $\rho_k=K\cdot\Delta U_{MN}/I$ , где  $I$  – эмиссия электрода  $A$ ,  $\Delta U_{MN}$  – разность потенциалов в точках  $M, N$  для градиент-зонда, либо  $\Delta U_{MN}=U_M$  для предельного потенциал-зонда КС, а  $K$  – коэффициент зонда. Для предельного потенциал-зонда  $AM$  коэффициент



**Рис. 26.** Кривые  $\rho_k/\rho_{\text{вм}}$  для потенциал-зонда КС.

Зонд А5М ( $AM=5$  м),  $l_x=l_y=30$  м,  $l_z=10$  м,  $\rho_0 \ll \rho_{\text{вм}}$

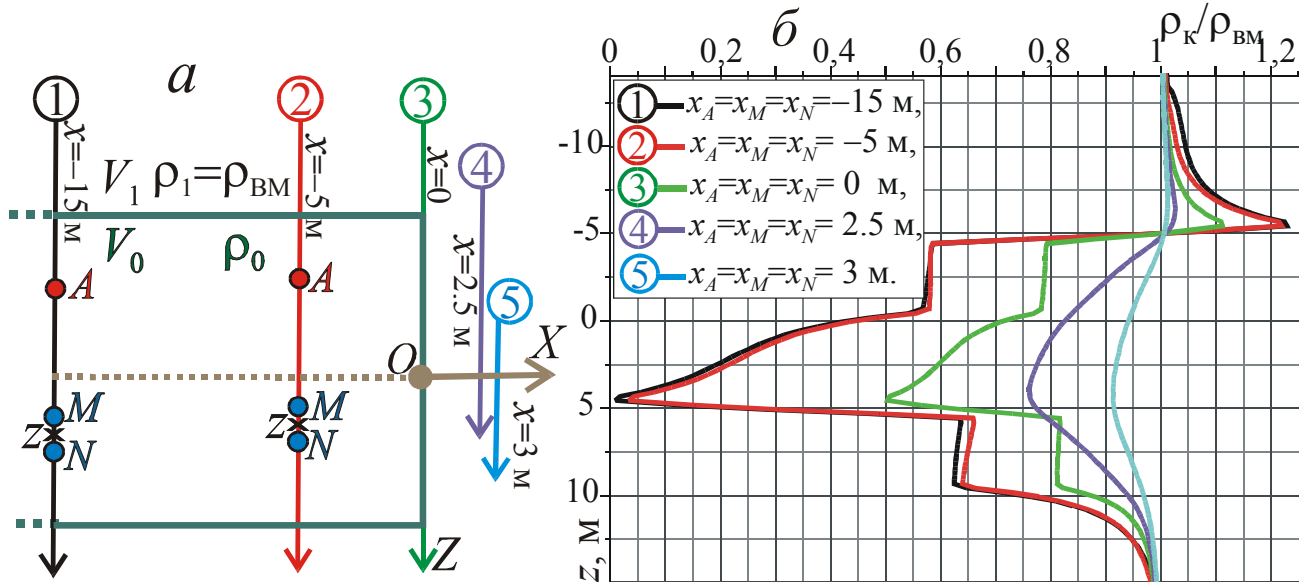
$K=4\pi\cdot AM$ , а для однополюсного градиент-зонда  $AMN$  коэффициент  $K=4\pi\cdot(AM\cdot AN)/MN$ , где  $AM, AN, MN$  – расстояния между точечными электродами: токовым электродом  $A$  и измерительными электродами  $M, N$ . Центры объектов  $V_0$  и зонды КС лежат в плоскости  $y=0$ .

На рис. 25 - 26 показаны примеры расчётных кривых  $\rho_k/\rho_{\text{вм}}$  для предельного потенциал-зонда КС при длине зонда  $AM=5$  м. Координата  $z$  точки записи такого зонда это  $-z$ -координата середины отрезка  $AM$ . Шифрам "x" кривых соответствуют  $x$ -координаты потенциал-зонда  $AM$  (в метрах) относительно "правого края" объекта  $V_0$ . Показанные на рис. 25 - 26 параллельные оси  $Z$  прямые, по которым перемещаются зонды, пересекают хорошо проводящий объект  $V_0$  ( $x=-15$  м или  $x=-5$  м), "касаются" границы тела  $V_0$  ( $x=0$  м), либо проходят на расстояниях  $x$  от границы объекта  $V_0$  ( $x=2.5$  м или  $x=4$  м). Например, при длинах  $l_x=l_y=30$  м, и при  $x=-15$  м потенциал - зонд  $AM$  "проходит" через центр объекта  $V_0$ . При  $x=2.5$  м или  $x=4$  м зонд "перемещается" на соответствующем расстоянии от границы объекта (модель "слепого рудного тела").

На рис. 25 - 26 видно, что при заданных при расчётах размерах  $l_x, l_y, l_z$  объекта  $V_0$ , координатах  $x$  зонда и длине зонда  $AM$  влияние "слепого" проводящего тела на значения  $\rho_k$  зонда КС – не велико. В приведенных на рис. 25 - 26 примерах расчётов это влияние не превышает 12 % для тела в форме прямоугольного параллелепипеда и 5 % для тела в форме эллипсоида вращения.

Результаты расчётов, приведенные на рис. 27, рис. 28, отвечают тем же моделям среды, что соответственно на рис. 25, рис. 26, но они получены для градиент-зонда  $A4.5M0.5N$  длиной 4.75 м. Координата  $z$  точки записи такого зонда

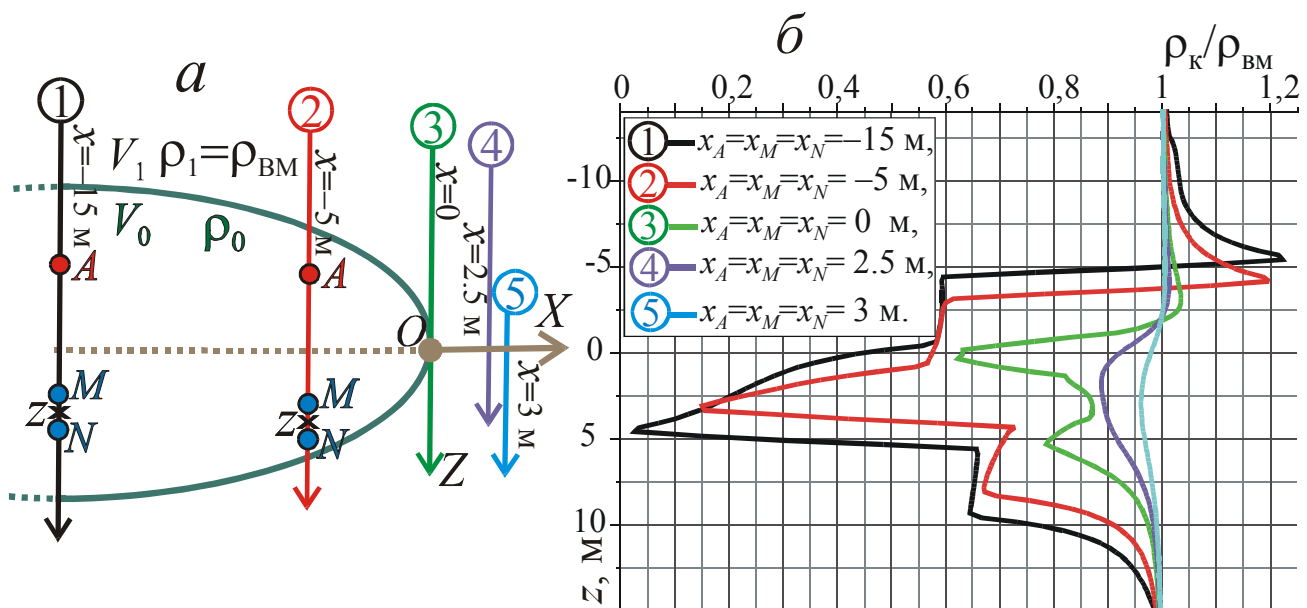
это –  $z$  - координата середины отрезка  $MN$ . На рис. 27, 28 видно, что при показанных на этих рисунках параметрах объекта  $V_0$ , координатах  $x$  зонда и размерах градиент-зонда влияние "слепого" проводящего тела  $V_0$  на значения  $\rho_k$  не превышает 23 % для объекта в форме прямоугольного параллелепипеда и 11 % для объекта в форме эллипсоида вращения.



**Рис. 27.** Кривые  $\rho_k/\rho_{BM}$  для градиент-зонда КС.

Зонд А4.5М1N ( $AM=4.5$  м,  $MN=1$  м),  $l_x=l_y=30$  м,  $l_z=10$  м,  $\rho_0 \ll \rho_{BM}$

Полученные данные моделирования показали, что результаты КС могут послужить для обнаружения "слепых" проводящих тел  $V_0$  лишь в тех случаях, когда зонды КС "проходят" на небольших расстояниях от таких тел. Количественное влияние параметров имеющих различную форму локальных объектов  $V_0$  (моделях среды) и размерах зондов КС на величину  $\rho_k$  в конкретных условиях не сложно установить по результатам математического моделирования



**Рис. 28.** Кривые  $\rho_k/\rho_{BM}$  для градиент-зонда КС.

Зонд А4.5М1N ( $AM=4.5$  м,  $MN=1$  м),  $l_x=l_y=30$  м,  $l_z=10$  м,  $\rho_0 \ll \rho_{BM}$

на основе применённой методики расчётов.

В заключение этого раздела отметим следующее. В тех случаях, когда зонды КС проходят через центр объекта  $V_0$ , на большом расстоянии от его "боковых" границ полученные при моделировании кривые на **рис. 25 - 28** *идентичны* тем, которые давно известны для 1D- модели среды "пласт конечной мощности" в теории каротажа сопротивлений при перемещении предельного потенциал-зонда или градиент-зонда по нормали к границам такого пласта (см., например, [Дахнов, 1972]). На **рис. 25 – 28** это кривые (1) чёрного цвета. Однако зависимости  $\rho_k/\rho_{вм}$  на этих рисунках получены отнюдь не для 1D– модели среды, а для 3D– моделей среды.

#### **4. Влияние локального объекта на результаты магнитотеллурических зондирований**

В монографии М. Н. Бердичевского и М. С. Жданова [Бердичевский, Жданов, 1981] приведено определение понятия "S-эффект" при магнитотеллурических зондированиях (МТЗ) и дано физическое истолкование этому явлению. Приведём цитаты из этой работы (с. 63 - 64). "При  $H$ -поляризации (ТМ-поле), когда для ненулевых декартовых компонент первичного поля имеем:  $H_y \neq 0$ ,  $E_x \neq 0$  и (или)  $E_z \neq 0$ , первичный ток течёт поперёк неоднородного включения. Следовательно, он заряжает включение. Избыточные заряды являются основным источником аномального электрического поля... Аномалия, очевидно, относится к гальваническому типу. Интенсивность этой гальванической аномалии зависит от плотности электрических зарядов, то есть *от распределения избыточного тока...* . Этот гальванический эффект называют эффектом  $S$ ... . Эффект  $S$  локален... и не зависит от частоты. Как бы мы не понижали частоту, нам не удастся избавиться от  $S$ -эффекта..."

В изданной позже монографии М. Н. Бердичевского и В. И. Дмитриева [Бердичевский, Дмитриев, 2009]  $S$ -эффектом названы искажения результатов МТЗ, вызванные аномалиями интегральной проводимости осадочной толщи (с. 271). Искажения, вызванные мелкими приповерхностными неоднородностями по удельному электрическому сопротивлению  $\rho$ , в этой монографии названы " $\rho$  – эффектом" (Rho - эффектом) – двумерным или трёхмерным (с. 263). Проблемы, связанные с моделированием влияния  $S$ -эффекта и (или)  $\rho$ -эффекта на результаты МТЗ, рассмотрены в ряде работ. Это, например, работы В. И. Дмитриева [Дмитриев, 1969], М. Н. Бердичевского и А. Г. Яковлева [Бердичевский, Яковлев, 1989], а также [Groom, Bailey, 1991], [Wannamaker et al., 1989] и др.

В этом разделе приведены результаты численных расчётов, которые (в соответствии с определением этого понятия в монографии [Бердичевский, Дмитриев, 2009]) можно назвать примером математического моделирования трёхмерного  $\rho$  – эффекта на основе полученного приближённого решения прямой задачи. Рассмотрены модели среды и линейно поляризованного первичного электромагнитного поля, при которых на результаты МТЗ может оказывать влияние имеющий изометричную форму и малые размеры приповерхностный объект, отличающийся от вмещающей его среды по удельному электрическому сопротивлению  $\rho$ .

Будем полагать, что распространяющееся в направлении оси  $Z$  первичное гармонически меняющееся ЭМ поле линейно поляризовано, среда – немагнитная, а в проводящем полупространстве ЭМ поле – квазистационарное. При соответствующем выборе направления осей  $X$ ,  $Y$  и применении комплексной записи для такого поля справедливы выражения:

$$\mathbf{E}^n = \mathbf{1}_x E_x^n, \quad E_x^n = E_{x0}^n \exp(-i\omega t), \quad \mathbf{H}^n = \mathbf{1}_y H_y^n, \quad H_y^n = H_{y0}^n \exp(-i\omega t),$$

где  $E_{x0}^{\text{п}}$ ,  $H_{y0}^{\text{п}}$  - комплексные амплитуды компонент  $E_x^{\text{п}}$ ,  $H_y^{\text{п}}$ ,  $i = \sqrt{-1}$  - мнимая единица,  $\omega = 2\pi \cdot f$  - круговая частота,  $f$  - частота,  $t$  - время. Такое первичное ЭМ поле - плоская гармоническая ЭМ волна, распространяющейся в направлении оси  $Z$ . При этом комплексные амплитуды  $E_{x0}^{\text{п}} = E_{x0}^{\text{п}}(z)$ ,  $H_{y0}^{\text{п}} = H_{y0}^{\text{п}}(z)$ .

Ограничимся случаем, когда малый объект  $V_i$  ( $V_0$ ) в форме шара с удельным электрическим сопротивлением  $\rho = \rho_0$ , с центром в точке  $a$  и с радиусом  $R_{\text{ш}}$  расположен в среде с  $\rho_{\text{вм}} = \rho_1$ , а первичное ЭМ поле  $\mathbf{E}^{\text{п}} = \mathbf{1}_x \cdot E_x^{\text{п}}$ ,  $\mathbf{H}^{\text{п}} = \mathbf{1}_y \cdot H_y^{\text{п}}$  (а также нормальное ЭМ поле в горизонтально-слоистой среде) однородно в пределах этого объекта (см. рис. 5). Тогда в соответствии с изложенным в разделе 1.3 и выражениями (6) в случае квазистационарного гармонически меняющегося ЭМ поля в однородной немагнитной среде вне объекта обусловленное его присутствием вторичное (аномальное) поле  $\mathbf{E}^{\text{в}}$ ,  $\mathbf{H}^{\text{в}}$  определяют выражения:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1^{\text{в}} &= \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{A}_1^{\text{в}}, \quad \mathbf{E}_1^{\text{в}} = i\omega \left( \mathbf{A}_1^{\text{в}} + \frac{1}{k_1^2} \text{grad div } \mathbf{A}_1^{\text{в}} \right), \quad \mathbf{A}_1^{\text{в}} = \mathbf{1}_x A_{1x}^{\text{в}}, \\ A_{1x}^{\text{в}} &= D \frac{\exp(ik_1 R)}{R}, \quad D \approx \frac{\mu_0}{\rho_1} CR_{\text{ш}}^3 E_x^{\text{п}}(a), \quad C = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 + 2\rho_0}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $k_1 = \sqrt{i\omega\mu_0/\rho_1}$  - волновое число в области пространства  $V_1$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ , Гн/м - магнитная постоянная,  $E_x^{\text{п}}(a)$  - компонента первичного (или нормального) электрического поля в центре  $a$  объекта  $V_0$ ,  $R = \sqrt{(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 + (z - z_a)^2}$ ,  $x_a$ ,  $y_a$ ,  $z_a$  и  $x$ ,  $y$ ,  $z$  - декартовы координаты соответственно точки  $a$  и точки наблюдения. Приближённые выражения для коэффициента  $D$  в этих равенствах были получены при условии, что  $|k_1|R_{\text{ш}} \ll 1$ , которое справедливо при небольших размерах объекта  $V_0$ , не очень низких значениях  $\rho_1$  вмещающей объект  $V_0$  среды и не очень высоких частотах  $f$ .

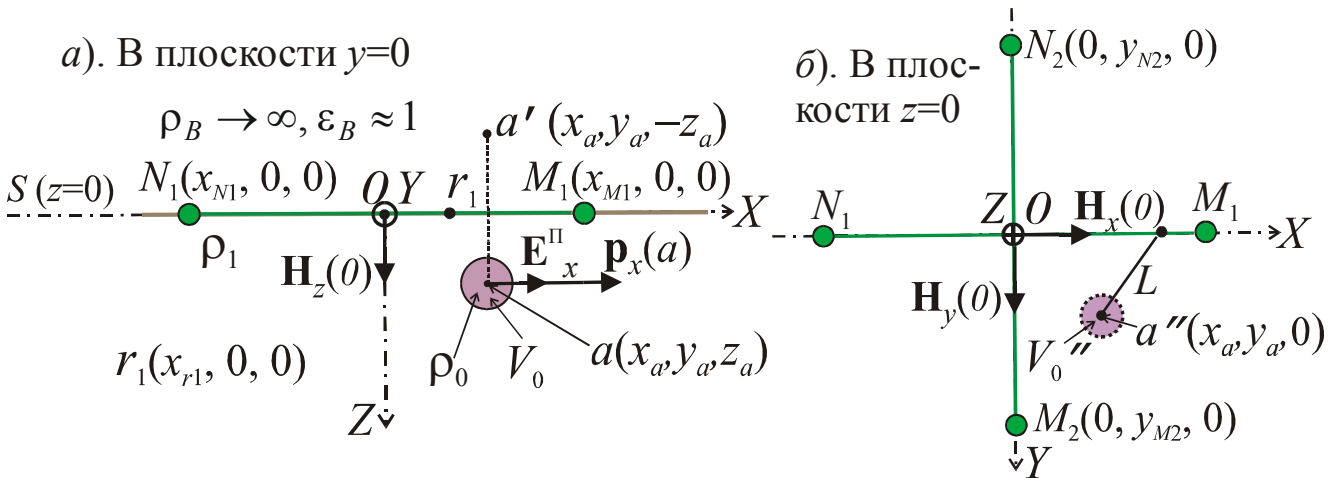
Можно было предположить, что если изометричный объект  $V_0$  имеет не форму шара, а иную форму (например, куба с ребром  $b$ ), то при достаточно большом расстоянии от объекта  $V_0$  до точек наблюдения приведенное приближённое выражение для  $D$  остаётся справедливым при  $v_{0 \text{ куба}} = v_{0 \text{ шара}}$ , то есть при  $b^3 = (4/3) \cdot \pi \cdot R_{\text{ш}}^3$ , конечно с некоторой погрешностью.

#### 4.1. Локальный объект $V_0$ в однородном проводящем полупространстве

Начнём со случая, когда объект  $V_0$  расположен в однородном проводящем полупространстве с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_1$  (рис. 29, а). Будем полагать, что в отсутствии объекта  $V_0$  гармонически меняющееся ЭМ поле - линейно поляризованная плоская гармоническая ЭМ волна, распространяющееся по направлению оси  $Z$ . Тогда соответствующие уравнению Гельмгольца ненулевые компоненты этого поля в области  $V_1$  с волновым числом  $k_1$  определяют выражения:

$$E_x^{\text{п}}(z, t) = E_{x0}^{\text{п}}(0) \cdot \exp(ik_1 z) \cdot \exp(-i\omega t),$$

$H_y^{\text{II}}(z, t) = H_{y0}^{\text{II}}(0) \cdot \exp(ik_1 z) \cdot \exp(-i\omega t)$ , где  $E_{x0}^{\text{II}}(0)$ ,  $H_{y0}^{\text{II}}(0)$  – комплексные амплитуды компонент  $E_x^{\text{II}}(z, t)$  и  $H_y^{\text{II}}(z, t)$  ЭМ поля в плоскости  $z=0$ .



**Рис. 29.** Локальный объект  $V_0$  в форме шара в однородном проводящем полупространстве и измерительные линии  $MN$

Известно, что методе МТЗ определяют компоненты электрической и магнитной составляющих ЭМ поля на границе "земля - воздух", соотношения между этими компонентами, кажущееся удельное электрическое сопротивление  $\rho_T$ . Кратко охарактеризуем применяемый при этом подход для случая, когда первичное (либо нормальное ЭМ поле в однородном проводящем полупространстве) удовлетворяет указанным выше условиям. Из уравнений Максвелла следует, что компоненты  $E_x^{\text{II}}(z, t)$  и  $H_y^{\text{II}}(z, t)$  связывает равенство:  $H_y^{\text{II}}(z, t) = E_x^{\text{II}}(z, t) / Z_{XY_1}$ , где в случае квазистационарного поля в немагнитной среде с удельным электрическим сопротивлением  $\rho = \rho_1$  импеданс  $Z_{XY_1}$  определяет выражение:

$$Z_{XY_1} = E_{x1} / H_{y1} = \pm \sqrt{-i\omega\mu_0\rho_1} = \pm \sqrt{\omega\mu_0\rho_1} \exp(-i\pi/4).$$

В правой части этого выражения верхний знак соответствует плоской гармонической ЭМ волне, распространяющейся по направлению оси  $Z$ , а нижний знак – волне, распространяющейся в противоположном направлении.

Заметим, что в ряде посвященных МТЗ работ некорректно употребляют термин "фаза импеданса". Такие термины, как "фаза", "начальная фаза" применимы к периодически меняющимся (в частности, гармонически меняющимся) скалярным величинам или скалярным компонентам векторных величин. Импеданс  $Z$  не является записанной в комплексной форме гармонически меняющейся величиной. Его можно характеризовать не амплитудой и фазой, а модулем  $|Z|$  и аргументом  $\text{Arg}(Z)$ .

Из выражения для  $Z_{XY_1}$  следует, что удельное электрическое сопротивление однородного полупространства  $\rho_1 = |Z_{XY_1}|^2 / (\omega\mu_0)$ . Поэтому кажущееся удельное электрическое сопротивление  $\rho_T$  в методе МТЗ определяет выражение

$$\rho_T = \frac{|Z_{XY}|^2}{\omega\mu_0} = \frac{(|Z_{XY}|\sqrt{T})^2}{2\pi\mu_0}, \quad (13)$$

где  $T=1/f$  – период, модуль импеданса  $|Z_{XY}|=|E_x|/|H_y|$ , а  $|E_x|$ ,  $|H_y|$  – амплитуды компонент  $E_x$ ,  $H_y$ . Аргумент импеданса  $Z_{XY}$ :  $\text{Arg}(Z_{XY}) = \varphi(E_x) - \varphi(H_y)$ , где  $\varphi(E_x)$ ,  $\varphi(H_y)$  – фазы компонент  $E_x$ ,  $H_y$  в фиксированный момент времени  $t$  (либо начальные фазы этих компонент).

На **рис. 29** показана модель среды, для случая, когда объект  $V_0$  в форме шара с радиусом  $R_{ш}$ , центром в точке  $a$  и удельным электрическим сопротивлением  $\rho_0$  расположен в однородном проводящем полупространстве с  $\rho=\rho_1$ . В верхнем полупространстве (воздух) электрические параметры:  $\rho_B \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon_B \approx 1$ . При  $z \geq 0$ , в отсутствие объекта  $V_0$ , комплексные амплитуды ненулевых компонент нормального ЭМ поля в виде плоской гармонической волны, распространяющейся в направлении оси  $Z$ , можем представить в следующем виде:

$$E_{x0}^n(z) = E_{x0}^n(0) \cdot \exp(ik_1 z), \quad H_{y0}^n(z) = E_{x0}^n(0) \cdot \exp(ik_1 z) \cdot \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{\omega\mu_0\rho_1}}.$$

Пусть теперь в проводящем полупространстве есть объект  $V_0$ . Если бы этот объект окружала однородная среда с  $\rho=\rho_1$ , то вторичное ЭМ поле приближённо определяли выражения (12). Но в показанной на **рис. 29** модели среды (при квазистационарном приближении) необходимо, чтобы в проводящей среде у границы  $S$  ( $z=0$ ) с изолятором нормальная к  $S$  компонента  $E_z$  электрического поля  $\mathbf{E}$  была равна нулю. Для выполнения этого условия, как и в разделе 2.1, воспользуемся методом зеркальных изображений. Математическое обоснование такого подхода для выполнения краевого условия 2-го типа на границе проводящей среды с изолятором известно для стационарного электрического поля  $\mathbf{E}$  (см., например, монографию [Альпин, 1971], стр. 200- 202).

Фактически применение метода зеркальных изображений позволяет учесть то, какое влияние на поле  $\mathbf{E}$  в проводящей среде оказывают поверхностные заряды, индуцированные на плоской границе  $S$  проводящей среды и изолятора. Для переменного ЭМ поля такое краевое условие, в общем случае не применимо. Но для ЭМ поля в квазистационарном приближении (как и для стационарного поля  $\mathbf{E}$ ) необходимо, чтобы в проводящей среде у границы  $S$  ( $z=0$ ) с изолятором нормальная к  $S$  компонента  $j_z$  вектора  $\mathbf{j}$  плотности электрического тока была равна нулю. Так как в проводящей среде с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_1$  компонента  $E_z = \rho_1 j_z$  то у границы  $S$  с изолятором при  $j_z=0$  и  $\rho_1 \neq 0$  компонента  $E_z=0$ .

Чтобы выполнить это условие, применим метод зеркальных изображений. Будем полагать, что вторичное ЭМ поле при  $z \geq 0$  обусловлено двумя одинаковыми объектами – "действительным" объектом  $V_0$ , с центром в точке  $a$  с координатами  $x_a$ ,  $y_a$ ,  $z_a$ , и его "зеркальным отражением" (в плоскости  $S$ ) – таким же, как  $V_0$  объектом с центром в точке  $a'$  и с координатами  $x_a$ ,  $y_a$ ,  $-z_a$  (см. **рис. 29, a**). Тогда, в соответствии с (12), при  $z \geq 0$  в окружающей объект  $V_0$  проводящей среде с  $\rho=\rho_1$  и



на границе  $S$  векторный электродинамический потенциал (электрического типа)  $\mathbf{A}^B$  определяют выражения:

$$\mathbf{A}^B = \mathbf{1}_x A_x^B \exp(-i\omega t), \quad A_x^B = D \left[ \frac{\exp(ik_1 R)}{R} + \frac{\exp(ik_1 R')}{R'} \right], \quad (14)$$

где  $A_x^B$  – комплексная амплитуда единственной ненулевой  $x$ -компоненты потенциала  $\mathbf{A}^B$ ,  $R = \sqrt{(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 + (z-z_a)^2}$ ,  $R' = \sqrt{(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 + (z+z_a)^2}$ , а выражение для множителя  $D$  приведено в (12).

Пользуясь равенствами (12), (14), можем получить выражения для декартовых компонент вторичного ЭМ поля. При условии, что  $\mathbf{E}^n = \mathbf{1}_x \cdot E_x^n$ ,  $\mathbf{H}^n = \mathbf{1}_y \cdot H_y^n$ , из (12), (14) следует, что на границе  $S$  проводящего полупространства (при  $z=0$ ) имеем:

$$\begin{aligned} E_z^B(x, y, 0) &= 0, \quad H_x^B(x, y, 0) = 0, \quad H_y^B(x, y, 0) = 0, \\ E_x^B(x, y, 0) &= 2F \cdot \frac{[3(x-x_a)^2 - R^2](1-ik_1 R) - [(x-x_a)^2 - R^2]k_1^2 R^2}{R^5} \exp(ik_1 R), \\ E_y^B(x, y, 0) &= 2F \cdot \frac{(x-x_a)(y-y_a)[3(1-ik_1 R) - k_1^2 R^2]}{R^5} \exp(ik_1 R), \\ H_z^B(x, y, 0) &= \frac{2F}{\rho_1} \cdot \frac{(y-y_a)(1-ik_1 R)}{R^3} \exp(ik_1 R), \quad F = C \cdot R_{\text{ш}}^3 \cdot E_x^n(z_a), \quad C = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 + 2\rho_0}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $R = \sqrt{(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 + z_a^2}$ .

Согласно (14), (15) компоненты вторичного (аномального) ЭМ поля пропорциональны  $E_x^n$ ,  $C$  и  $R_{\text{ш}}^3$ . Множитель  $C$  в (15) может меняться в пределах от  $-0.5$  до  $1$ . Из компонент магнитного поля  $\mathbf{H}^B$  влияние объекта  $V_0$  "испытывает" только вертикальная составляющая  $H_z^B$ .

При МТЗ индукционные датчики, служащие для измерения компонент магнитного поля, имеют небольшие размеры. Можно принять допущение, что измеряемые при помощи таких датчиков сигналы зависят от соответствующих компонент переменного магнитного поля в центрах датчиков. Но предназначенные для определения компонент  $E_x$ ,  $E_y$  электрического поля измерительные линии  $MN$  имеют протяжённость в десятки метров. Длины этих линий могут значительно превышать линейные размеры локальных объектов  $V_0$ . Поэтому для выяснения влияния таких объектов на результаты МТЗ нами были проведены расчеты для напряжения  $\mathcal{E}_{M_1 N_1}$  суммарного электрического поля  $\mathbf{E}$  в линии  $M_1 N_1$ , лежащей на оси  $X$  в плоскости  $z=0$  (см. рис. 29, б):

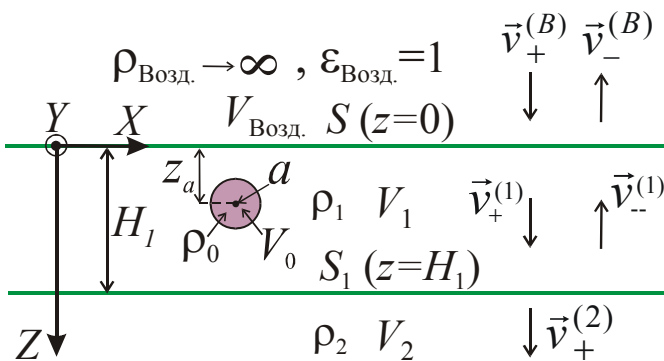
$$\mathcal{E}_{M_1 N_1} = \int_{x_{M_1}}^{x_{N_1}} E_x dx. \quad (16)$$

Затем, как это принято в методе МТЗ, компонента  $E_x$  была определена следующим образом:  $E_x = \mathcal{E}_{M_1 N_1} / M_1 N_1$ , где  $M_1 N_1$  – длина измерительной линии.

## 4.2. Двухслойное проводящее полупространство

### 4.2.1. Нормальное поле

Как и ранее будем полагать, что в отсутствие объекта  $V_0$  первичное гармонически меняющееся ЭМ поле линейно поляризовано и ненулевыми являются компоненты  $E_x^{\text{п}}(z, t)$  и  $H_y^{\text{п}}(z, t)$ . Получим выражения для составляющих ЭМ поля при следующих условиях. На горизонтальную границу  $S$  ( $z=0$ ) проводящего полупространства с нормалью  $Z$  падает плоская линейно поляризованная гармоническая ЭМ волна, распространяющаяся в воздухе (с



**Рис. 30.** Нормальное "падение" плоской гармонической ЭМ волны на границу  $S$  двухслойного проводящего полупространства

электрическими параметрами  $\rho_B \rightarrow \infty$ ,  $\epsilon_B \approx 1$ ) со скоростью  $\mathbf{v}_+^{(B)}$  по направлению оси  $Z$ . Абсолютная величина

$|\mathbf{v}_+^{(B)}| \approx c = (1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}) \approx 3 \cdot 10^8$ , м/с. В проводящем полупространстве есть горизонтальная граница  $S_1$  ( $z=H_1$ ) между областью пространства (пластом)  $V_1$  с  $\rho=\rho_1$  и не ограниченной снизу областью пространства  $V_2$  с  $\rho=\rho_2$  (рис. 30).

Сначала будем полагать, что показанного на рис. 30 объекта  $V_0$  нет и модель среды – не трёхмерная (3D), а одномерная (1D), с двумя горизонтальными границами  $S$  и  $S_1$ . Для определения нормального ЭМ поля в такой 1D- модели среды применим тот же подход, которым мы пользовались в учебнике [Альпин и др., 2020, б].

В полупространстве  $V_B$  ( $z < 0$ ) при указанных условиях для ненулевых компонент распространяющейся в направлении оси  $Z$  и падающей на границу  $S$  ЭМ волны справедливы равенства:  $E_{+x}^B(z) = E_{+x}^B(0) \cdot \exp(ik_B z)$ ,  $H_{+y}^B(z) = (1/Z_B) E_{+x}^B(0) \cdot \exp(ik_B z)$ , где (в воздухе) волновое число  $k_B \approx \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ , импеданс  $Z_B \approx \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ .

Выражения для ненулевых компонент  $E_x$ ,  $H_y$  ЭМ поля соответственно в областях пространства  $V_B$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  будем искать (как решения уравнений Гельмгольца для областей пространства с волновыми числами  $k_B$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ) в виде сумм плоских гармонических ЭМ волн:

$$\begin{aligned}
&\text{в } V_B : E_x^{(B)}(z) = E_{+x}^{(B)}(0)[\exp(ik_B z) + A_{B1} \exp(-ik_B z)], \\
&H_y^{(B)}(z) = (1/Z_B)E_{+x}^{(B)}(0)[\exp(ik_B z) - A_{B1} \exp(-ik_B z)]; \\
&\text{в } V_1 : E_x^{(1)}(z) = E_{+x}^{(B)}(0)[B_{B1} \exp(ik_1 z) + A_{12} \exp(-ik_1 z)], \\
&H_y^{(1)}(z) = (1/Z_1)E_{+x}^{(B)}(0)[B_{B1} \exp(ik_1 z) - A_{12} \exp(-ik_1 z)]; \quad (17) \\
&\text{в } V_2 : E_x^{(2)}(z) = E_{+x}^{(B)}(0)B_{12} \exp(ik_2 z), \\
&H_y^{(2)}(z) = (1/Z_2)E_{+x}^{(B)}(0)B_{12} \exp(ik_2 z),
\end{aligned}$$

где  $A, B$  – множители не зависящие от координаты  $z$ .

При записи выражений для (не ограниченной "снизу") области пространства  $V_2$  принято во внимание, что в этой области есть только проходящая волна, распространяющаяся с фазовой скоростью  $\mathbf{v}_+^{(2)}$  в направлении оси  $Z$  (см. рис. 30). В равенствах (17)  $E_{+x}^{(B)}(0)$  – компонента первичного электрического поля  $E_{+x}^{(B)}(z)$  при  $z=0$ ,  $A_{B1}$  – множитель, от которого зависят компоненты поля ЭМ волны, распространяющейся в полупространстве  $V_B$  в направлении, антипараллельном оси  $Z$ , со скоростью  $\mathbf{v}_-^{(B)}$ , абсолютная величина которой  $|\mathbf{v}_-^{(B)}| \approx c$ ;  $E_x^{(1)}(z)$  и  $H_y^{(1)}(z)$  – комплексные амплитуды компонент ЭМ волн, распространяющийся в области  $V_1$  с фазовыми скоростями  $\mathbf{v}_+^{(1)}$  и  $\mathbf{v}_-^{(1)}$  (см. рис. 30) в направлениях, коллинеарных оси  $Z$ ;  $E_x^{(2)}(z)$  и  $H_y^{(2)}(z)$  – комплексные амплитуды компонент ЭМ волны, проходящей в область  $V_2$  и распространяющейся в области  $V_2$  по направлению оси  $Z$  с фазовой скоростью  $\mathbf{v}_+^{(2)}$ . В выражениях (17) импедансы  $Z_{1,2} = \sqrt{-i\omega\mu_0\rho_{1,2}}$ .

Для определения множителей  $A_{B1}, B_{B1}, A_{12}, B_{12}$  в правых частях выражений (17) потребуем непрерывности тангенциальных к границам  $S, S_1$  компонент  $E_x, H_y$  ЭМ поля:

$$\left. \begin{aligned}
E_x^{(1)}(0) &= E_x^{(B)}(0), & H_y^{(1)}(0) &= H_y^{(B)}(0), \\
E_x^{(2)}(H_1) &= E_x^{(1)}(H_1), & H_y^{(2)}(H_1) &= H_y^{(1)}(H_1).
\end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Из (17), (18) получаем, в частности, для множителей  $B_{B1}, A_{12}$  в (17), от которых зависит ЭМ поле в области (слое)  $V_1$ , следующие выражения:

$$\begin{aligned}
B_{B1} &= \frac{2Z_{1B}(1+Z_{21})}{(1+Z_{1B})(1+Z_{21}) + (1-Z_{1B})(1-Z_{21})\exp(2ik_1 H_1)}, \\
A_{12} &= \frac{2Z_{1B}(1+Z_{21})\exp(2ik_1 H_1)}{(1+Z_{1B})(1+Z_{21}) + (1-Z_{1B})(1-Z_{21})\exp(2ik_1 H_1)},
\end{aligned} \quad (19)$$

где  $Z_{1B} = Z_1/Z_B$ ,  $Z_{21} = Z_2/Z_1$ .

При  $\rho_2 = \rho_1$ , либо при  $H_1 \rightarrow \infty$  из (11) получаем:  $A_{12} = 0$ ,  $B_{B1} = 2Z_{1B}/(1+Z_{1B}) = 2Z_B/(Z_B + Z_1)$ . Из (17), (19) следует, что компоненты  $E_x^H(z)$ ,  $H_y^H(z)$  нормального гармонически меняющегося, линейно поляризованного ЭМ

поля в однородном проводящем полупространстве с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_1$  определяют выражения:

$$E_x^H(z) = [2Z_B / (Z_B + Z_1)] E_{+x}^{(B)}(0) \exp(ik_1 z), \quad H_y^H(z) = E_x^H(z) / Z_1.$$

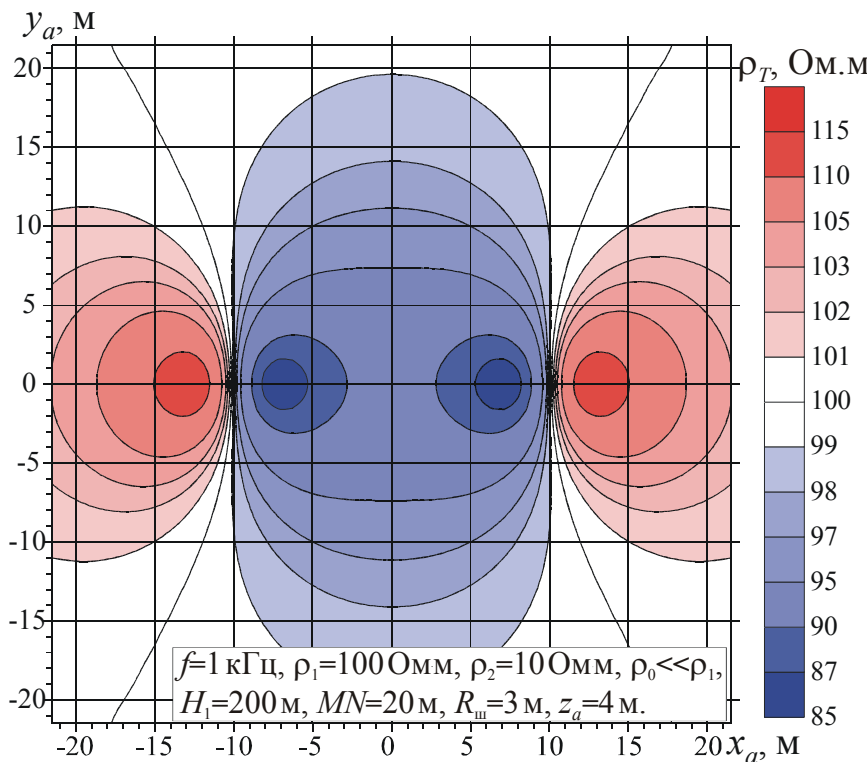
Согласно (17), при применённом нами подходе для расчёта ЭМ поля в 1D-модели среды надо задать величину  $E_{+x}^{(B)}(0)$ . Если при расчётах поля удобнее полагать, что заданной величиной является компонента  $E_x^H(0)$  нормального поля, то можно принять во внимание, что  $E_{+x}^{(B)}(0) = [(Z_B + Z_1) / 2Z_B] E_x^H(0)$ .

#### 4.2.2. Результаты моделирования

На основе выражений (15) - (17), (19) было проведено математическое моделирование. Некоторые результаты такого моделирования, показывающие то, какое влияние на результаты МГЗ может оказывать приповерхностный локальный объект, приведены ниже для случая, когда  $H_1=200$  м,  $h=4$  м,  $R_{ш}=3$  м,  $MN=20$  м (см. рис. 29, 30). Результаты расчётов получены при множителе  $C=1$  в выражении (12), что соответствует неравенству  $\rho_0 \ll \rho_1$ .

На рис. 31 показана карта, иллюстрирующая зависимость кажущегося удельного электрического сопротивления  $\rho_T$  от координат  $x_a, y_a$  центра объекта  $V_0$ . Значения  $\rho_T$  определены по модулю импеданса  $|Z_{xy}| = |E_x| / |H_y|$ , где  $|E_x|, |H_y|$  – амплитуды компонент  $E_x, H_y$  в плоскости  $S (z=0)$ .

Отметим следующее. Так как согласно (15) присутствие локального объекта



**Рис. 31.** Зависимость  $\rho_T$  от координат  $x_a, y_a$  центра объекта  $V_0$ , расположенного в верхнем слое 2-х-слойного проводящего полупространства

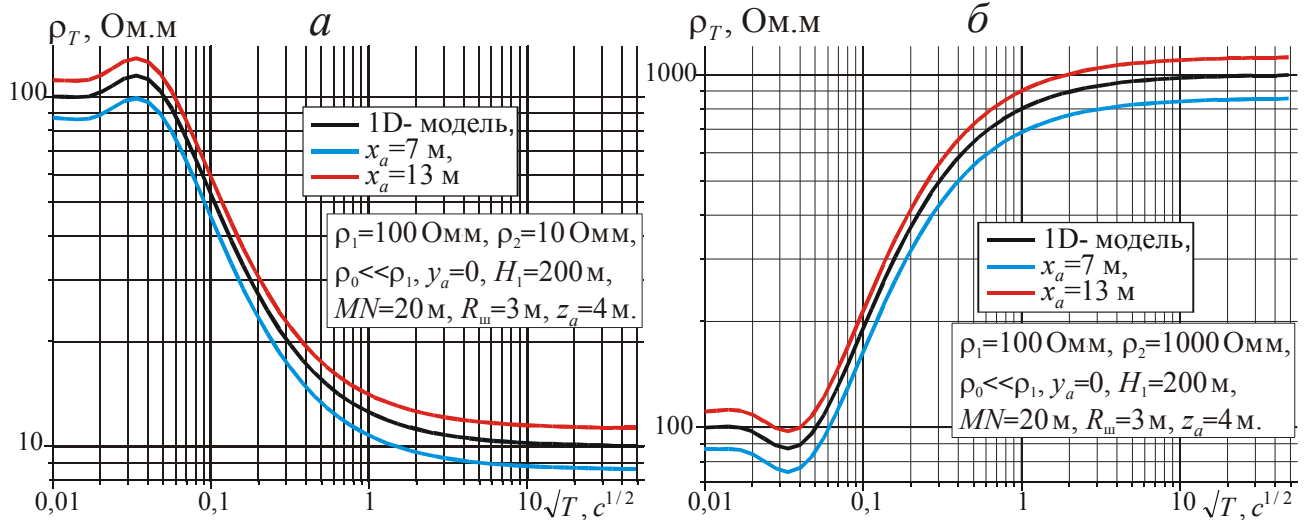
$V_0$  не оказывает влияния на компоненту  $H_y$  магнитного поля при  $z=0$ , то влияние  $V_0$  на компоненту  $Z_{xy}$  импеданса и величину  $\rho_T$  обусловлено влиянием этого объекта только на компоненту  $E_x$  суммарного электрического поля при  $z=0$ .

На рис. 31 видим, что при заданных параметрах модели среды присутствие объекта  $V_0$  может оказывать влияние на величину  $\rho_T$  до  $\pm 15\%$ . Максимальное по абсолютной величине влияние на значение  $\rho_T$

объект  $V_0$  оказывает в том случае, когда его эпицентр лежит на прямой,

проходящей через электроды  $MN$ , на расстоянии от электродов  $M, N$  немного меньшем, чем глубина  $h=z_a$  до центра объекта  $V_0$ .

**Рис. 32, а, б** иллюстрируют то, какое влияние оказывает присутствие локального объекта  $V_0$  на зависимость  $\rho_T$  от  $\sqrt{T}$ , где  $T=1/f$  – период. Чёрным цветом показаны кривые для 2-х-слойной 1D- модели проводящего



**Рис. 32.** Зависимости  $\rho_T$  от  $\sqrt{T}$

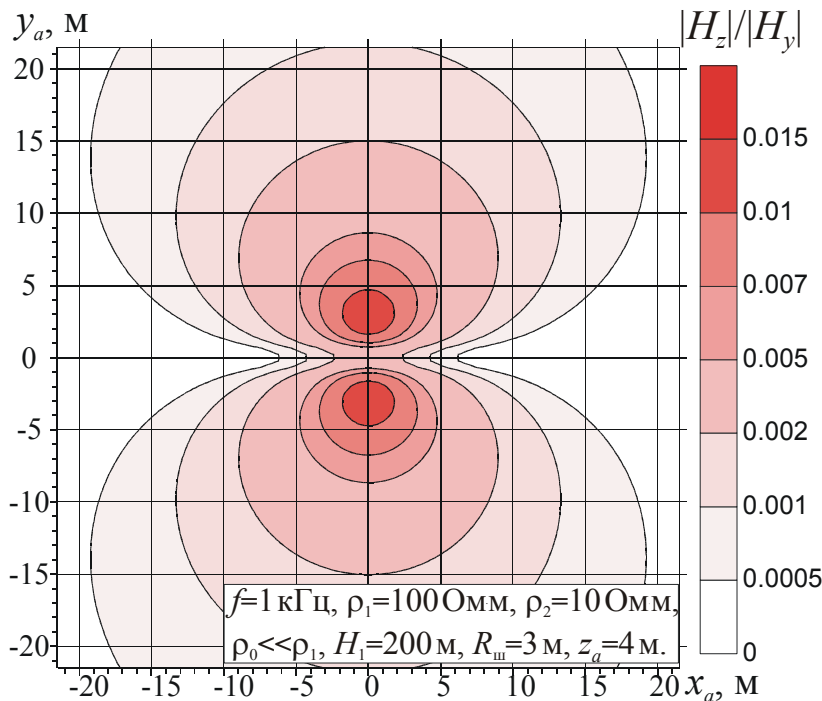
полупространства (в отсутствие объекта  $V_0$ ). Кривые синего и красного цвета получены для 3D- модели среды, показанной на **рис. 30**, при координатах эпицентра  $V_0$ :  $y_a=0$  и соответственно  $x_a=7$  м и  $x_a=13$  м. Эти значения координат  $x_a, y_a$  были выбраны потому, что при них, как видно на **рис. 31**, объект  $V_0$  оказывает разное по знаку и наибольшее по абсолютной величине влияние на величину  $\rho_T$ .

На **рис. 32** видим, что относительное влияние приповерхностного локального объекта  $V_0$  на  $\rho_T$  (а, следовательно, и на амплитуду  $|E_x|$  компоненты  $E_x$  суммарного электрического поля) практически не зависит от  $\sqrt{T}$ . Это, подтверждает высказанное в работах М. Н. Бердичевского и других учёных утверждение о том, что обусловленное присутствием локальной неоднородности аномальное электрическое поле при  $S$ -эффекте и (или)  $\rho$ -эффекте имеет преимущественно гальваническую (кулонову) природу.

С этими, высказанными в монографии [Бердичевский, Дмитриев, 2009] утверждениями, конечно, согласуются также следующее. Как показали результаты моделирования, присутствие объекта  $V_0$  практически не влияет на аргумент импеданса  $\text{Arg}(Z_{xy})$  и, следовательно, на начальную фазу компоненты  $E_x$  суммарного электрического поля при  $z=0$ . Это возможно лишь в том случае, когда индукционная составляющая аномального электрического поля  $E^b$ , обусловленная влиянием объекта  $V_0$ , пренебрежимо мала по сравнению с гальванической (кулоновой) составляющей этого поля.

Понятно, что на основе приведенного в этой работе приближённого решения 3D- прямой задачи не сложно было получить результаты математического моделирования не только для  $\rho_T$ , и  $\text{Arg}(Z_{xy})$ , но и для других характеристик, измеряемых, либо вычисляемых в методе МТЗ. Приведём примеры результатов

моделирования для отношения (обусловленной присутствием объекта  $V_0$ )



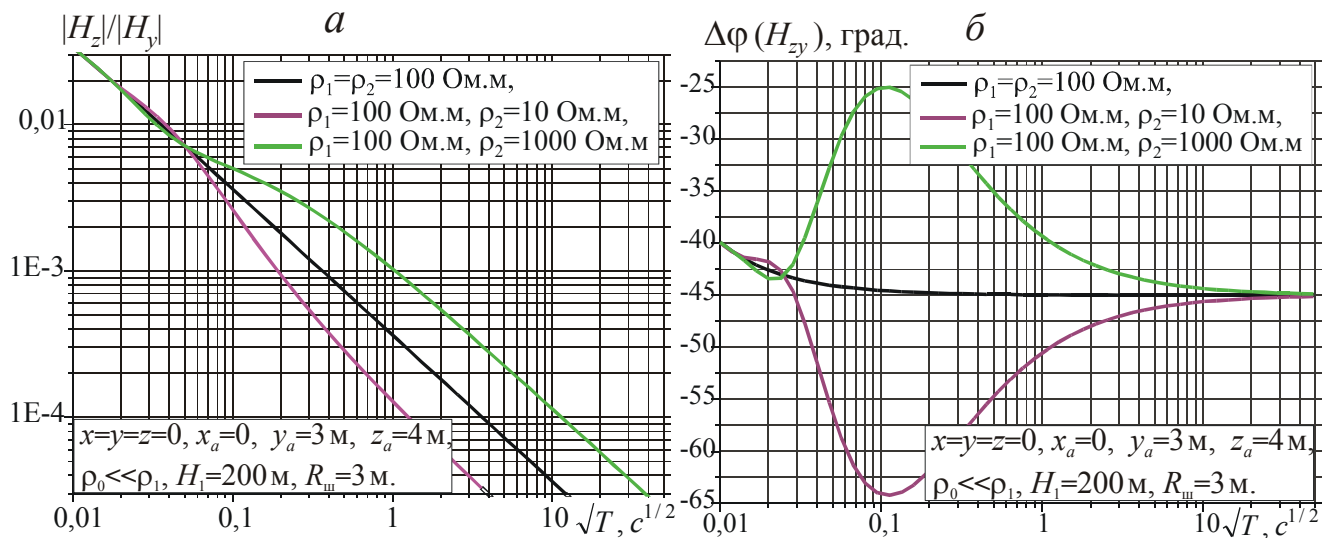
**Рис. 33.** Зависимость отношения амплитуд  $|H_z|/|H_y|$  от координат  $x_a, y_a$  центра объекта  $V_0$ , находящегося в верхнем слое 2-х-слойного проводящего полупространства

вертикальной компоненты  $H_z$  аномального магнитного поля и компоненты  $H_y$  магнитного поля, на которую согласно (15) при  $z=0$  не оказывает влияния объект  $V_0$ .

На рис. 33 приведена карта, показывающая зависимость отношения амплитуд  $|H_z|$  компоненты  $H_z$  и амплитуды  $|H_y|$  компоненты  $H_y$ . На этом рисунке, как и на рис. 31, положение точки на карте определяют координаты  $x_a, y_a$  эпицентра объекта  $V_0$ . Из результатов моделирования, приведенных на рис. 33, следует, что при заданных при расчётах параметрах модели среды и частоте  $f$

присутствие объекта  $V_0$  оказывает на отношение  $|H_z|/|H_y|$  влияние, не превышающее 0.02. Но напомним, что в отсутствие объекта  $V_0$  и при рассматриваемой нами модели нормального ЭМ поля, отношение  $|H_z|/|H_y|$  было бы равно нулю.

На рис. 34, а показана зависимость отношения амплитуд  $|H_z|/|H_y|$  от  $\sqrt{T}$ . Ещё раз обратим внимание на следующее. При тех моделях первичного ЭМ поля и среды, для которых были получены выражения (15) и проведены численные



**Рис. 34.** Зависимости отношения амплитуд  $|H_z|/|H_y|$  и разности фаз  $\Delta\varphi(H_{zy})$  от  $\sqrt{T}$

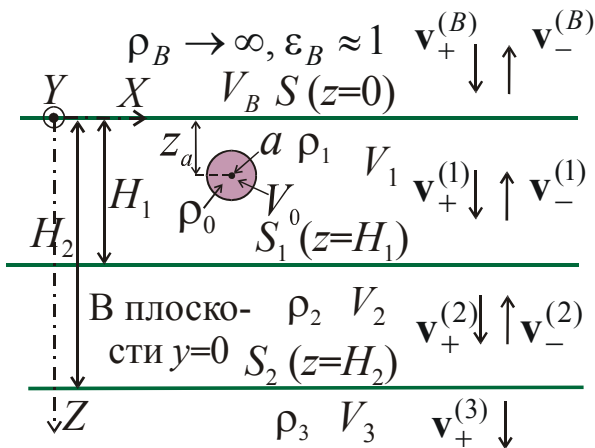
расчёты (при  $z=0$ ), вертикальная компонента  $H_z=H_z^B$ . То есть в отсутствие объекта  $V_0$  компонента  $H_z=0$ . Напротив, горизонтальная компонента  $H_y=H_y^B$ , то есть объект  $V_0$  не оказывает влияния на эту составляющую магнитного поля. На этом рисунке видим, что отношение амплитуд  $|H_z|/|H_y|$  монотонно убывает с ростом периода колебаний  $T$ . Пример зависимости разности фаз  $\Delta\varphi(H_{zy})=\varphi(H_z)-\varphi(H_y)$  от аргумента  $\sqrt{T}$  показан на **рис. 34, б**. Согласно результатам расчётов, представленным на **рис. 34, а, б**, зависимости  $|H_z|/|H_y|$  и, особенно  $\Delta\varphi(H_{zy})$ , от  $\sqrt{T}$  имеют значительные различия при  $\rho_2=\rho_1$ ,  $\rho_2>\rho_1$  и  $\rho_2<\rho_1$ .

### 4.3. Трёхслойное проводящее полупространство

#### 4.3.1. Нормальное поле

Получим сначала выражения для нормального ЭМ поля в 3-х - слойной 1D – модели проводящего полупространства в отсутствие объекта  $V_0$ .

Пусть на горизонтальную границу  $S$  ( $z=0$ ) проводящего полупространства с нормалью  $Z$  падает плоская линейно поляризованная гармоническая ЭМ волна с ненулевыми компонентами  $E_x$  и  $H_y$ , распространяющаяся в воздухе (с электрическими параметрами  $\rho_B \rightarrow \infty$ ,  $\epsilon_B \approx 1$ ) со скоростью  $v_+^{(B)}$  по направлению оси  $Z$ . В проводящем полупространстве есть три области: 1) пласт  $V_1$  с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_1$ , ограниченный плоскостями  $S$  ( $z=0$ ) и  $S_1$  ( $z=H_1$ ); 2) пласт  $V_2$  с  $\rho=\rho_2$ , ограниченный плоскостями  $S_1$  ( $z=H_1$ ),  $S_2$  ( $z=H_2$ ) и 3) полупространство  $V_3$  ( $z>H_2$ ) с  $\rho=\rho_3$  (**рис. 35**).



**Рис. 35.** Нормальное "падение" плоской гармонической ЭМ волны на границу  $S$  трёхслойного проводящего полупространства

виде:

В полупространстве  $V_B$  ( $z<0$ ) при соответствующем выборе направлений осей  $X$ ,  $Y$  для ненулевых компонент распространяющейся в направлении оси  $Z$  и падающей на границу  $S$  ЭМ волны (первичного ЭМ поля) справедливы равенства:  $E_{+x}^B(z) = E_{+x}^B(0) \cdot \exp(ik_B z)$ ,  $H_{+y}^B(z) = (1/Z_B) E_{+x}^B(0) \cdot \exp(ik_B z)$ , где волновое число  $k_B \approx \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ , а импеданс  $Z_B \approx \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ .

Выражения для ненулевых компонент  $E_x$ ,  $H_y$  нормального поля соответственно в областях пространства  $V_B$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  будем искать в следующем

$$\begin{aligned}
& \text{в } V_B : E_x^{(B)}(z) = E_{+x}^{(B)}(0)[\exp(ik_B z) + A_{B1}\exp(-ik_B z)], \\
& H_y^{(B)}(z) = (1/Z_B)E_{+x}^{(B)}(0)[\exp(ik_B z) - A_{B1}\exp(-ik_B z)]; \\
& \text{в } V_1 : E_x^{(1)}(z) = E_{+x}^{(B)}(0)[B_{B1}\exp(ik_1 z) + A_{12}\exp(-ik_1 z)], \\
& H_y^{(1)}(z) = (1/Z_1)E_{+x}^{(B)}(0)[B_{B1}\exp(ik_1 z) - A_{12}\exp(-ik_1 z)]; \\
& \text{в } V_2 : E_x^{(2)}(z) = E_{+x}^{(B)}(0)[B_{12}\exp(ik_2 z) + A_{23}\exp(-ik_2 z)], \\
& H_y^{(2)}(z) = (1/Z_2)E_{+x}^{(B)}(0)[B_{12}\exp(ik_2 z) - A_{23}\exp(-ik_2 z)]; \\
& \text{в } V_3 : E_x^{(3)}(z) = E_{+x}^{(B)}(0)B_{23}\exp(ik_3 z), \\
& H_y^{(3)}(z) = (1/Z_3)E_{+x}^{(B)}(0)B_{23}\exp(ik_3 z),
\end{aligned} \tag{20}$$

где  $Z_B, Z_1, Z_2, Z_3$  – импедансы для областей  $V_B, V_1, V_2, V_3$ , а  $E_{+x}^{(B)}(0)$  – комплексная амплитуда компоненты первичного электрического  $E_{+x}^{(B)}(z)$  (ЭМ волны падающей на границу  $S$ ) при  $z=0$ ,  $A_{B1}, B_{B1}, A_{12}, B_{12}, A_{23}, B_{23}$  – множители подлежащие определению и имеющие некоторое отношение к коэффициентам отражения и прохождения границ  $S, S_1, S_2$ . Напомним, что в случае квазистационарного ЭМ поля в немагнитной среде в областях  $V_1, V_2, V_3$  импедансы  $Z_{1,2,3} = \sqrt{-i\omega\mu_0\rho_{1,2,3}}$ .

Для определения множителей  $A_{B1}, B_{B1}, A_{12}, B_{12}, A_{23}, B_{23}$  в правых частях выражений (20) потребуем непрерывности тангенциальных к границам  $S$  ( $z=0$ ),  $S_1$  ( $z=H_1$ ),  $S_2$  ( $z=H_2$ ) компонент  $E_x, H_y$  ЭМ поля:

$$\left. \begin{aligned}
& E_x^{(1)}(0) = E_x^{(B)}(0), \quad H_y^{(1)}(0) = H_y^{(B)}(0), \\
& E_x^{(2)}(H_1) = E_x^{(1)}(H_1), \quad H_y^{(2)}(H_1) = H_y^{(1)}(H_1), \\
& E_x^{(3)}(H_2) = E_x^{(2)}(H_2), \quad H_y^{(3)}(H_2) = H_y^{(2)}(H_2).
\end{aligned} \right\} \tag{21}$$

Выражения (20), (21) позволяют составить систему 6-и уравнений с 6-ю неизвестными:  $A_{B1}, B_{B1}, A_{12}, B_{12}, A_{23}, B_{23}$ . При её решении получаем, в частности, для множителей  $B_{B1}, A_{12}$  в (20), от которых зависит ЭМ поле в области (слое)  $V_1$  следующие выражения:

$$\begin{aligned}
& B_{B1} = \frac{2Z_{1B}}{Z_{1B} + 1} - A_{12} \frac{Z_{1B} - 1}{Z_{1B} + 1}, \quad A_{12} = \frac{2Z_{1B} \cdot P_{1p}}{Z_{1B} + 1} \times \\
& \quad Z_{21} \left( P_{21p} + \frac{Z_{32} - 1}{Z_{32} + 1} P_{22p} P_{21m} \right) - \\
& \times \frac{\left( \frac{Z_{1B} - 1}{Z_{1B} + 1} P_{1p} + P_{1m} \right) Z_{21} \left( P_{21p} + \frac{Z_{32} - 1}{Z_{32} + 1} P_{22p} P_{21m} \right) -}{\left( P_{21p} - \frac{Z_{32} - 1}{Z_{32} + 1} P_{22p} P_{21m} \right)} \rightarrow \\
& \rightarrow \frac{- \left( \frac{Z_{1B} - 1}{Z_{1B} + 1} P_{1p} - P_{1m} \right) \left( P_{21p} - \frac{Z_{32} - 1}{Z_{32} + 1} P_{22p} P_{21m} \right)}{\quad},
\end{aligned} \tag{22}$$



где  $Z_{1B} = Z_1/Z_B$ ,  $Z_{21} = Z_2/Z_1$ ,  $Z_{32} = Z_3/Z_2$ ,  $P_{1p} = \exp(ik_1H_1)$ ,  $P_{1m} = \exp(-ik_1H_1)$ ,  
 $P_{21p} = \exp(ik_2H_1)$ ,  $P_{21m} = \exp(-ik_2H_1)$ ,  $P_{2p} = \exp(ik_2H_2)$ ,  $P_{2m} = \exp(-ik_2H_2)$ ,  
 $P_{22p} = \exp(ik_22H_2)$ .

Выражения (20)<sub>3,4</sub>, (22) для ненулевых компонент  $E_x^{(1)}(z)$ ,  $H_y^{(1)}(z)$  определяют нормальное ЭМ поле в верхнем слое 3-х - слойной горизонтально-слоистой модели проводящего полупространства. При  $\rho_3=\rho_2=\rho_1$ , либо при  $H_1 \rightarrow \infty$  и  $H_2 \rightarrow \infty$  (однородное проводящее полупространство) из выражений (22) получаем:  $A_{12}=0$ ,  $B_{B1} = 2Z_{1B}/(1 + Z_{1B}) = 2Z_B/(Z_B + Z_1)$ . Из (20), (22) следует, что компоненты  $E_x^H(z)$ ,  $H_y^H(z)$  "нормального" гармонически меняющегося, линейно поляризованного ЭМ поля в однородном проводящем полупространстве с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_1$  определяют выражения:

$$E_x^H(z) = [2Z_B/(Z_B + Z_1)] E_{+x}^{(B)}(0) \exp(ik_1z), \quad H_y^H(z) = E_x^H(z)/Z_1.$$

При проведении численных расчётов для случая, когда в верхнем слое (области  $V_1$  пространства) расположен объект  $V_0$  (см. **рис. 35**) были приняты следующие допущения. Обусловленное присутствием объекта  $V_0$  аномальное ЭМ поле определяют выражения (15). Входящая в выражение (15) величина  $E_x^n(z_a)$  – это определяемая в соответствии с (20)<sub>3</sub>, (22) компонента  $E_x^{(1)}(z_a)$  нормального поля в центре  $a$  (с координатами:  $x_a, y_a, z_a$ ) объекта  $V_0$ .

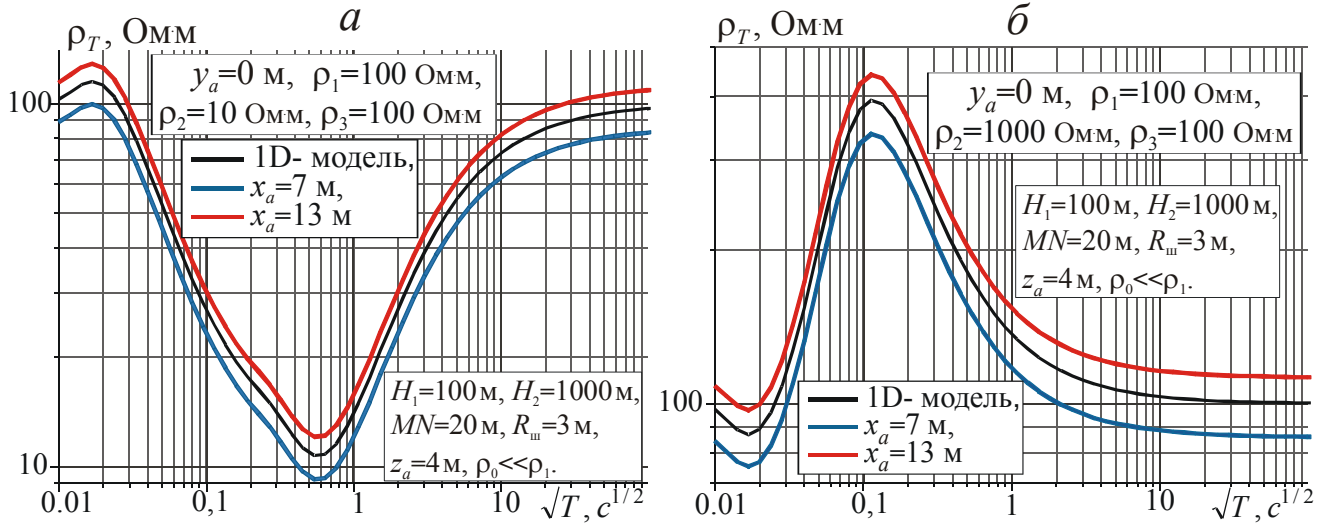
#### 4.3.2. Результаты моделирования

На основе выражений (15), (20), (22) было проведено математическое моделирование. Некоторые результаты такого моделирования, показывающие то, какое влияние на результаты МТЗ может оказывать имеющий малые размеры и изометричную форму приповерхностный локальный объект  $V_0$ , расположенный в верхнем слое 3-х-слойной модели проводящего полупространства, приведены ниже для двух разных положений центра  $a$  этого объекта  $V_0$  (координаты точки  $a$ :  $x_a, y_a=0, z_a=h$ ) относительно центра  $0$  лежащей в плоскости  $z=0$  измерительной установки метода МТЗ. Результаты расчётов получены при множителе  $S=1$  в выражении (15), то есть при  $\rho_0 \ll \rho_1$ .

**Рис. 36, а, б** иллюстрируют то, какое влияние оказывает присутствие локального объекта  $V_0$  на зависимость  $\rho_T$  от  $\sqrt{T}$ . Чёрным цветом показаны кривые для 3-х-слойной 1D – модели проводящего полупространства (в отсутствие объекта  $V_0$ ). Кривые синего и красного цвета получены для 3D– модели среды, показанной на **рис. 35**, при координатах центра  $a$  объекта  $V_0$ :  $y_a=0$  м и разных ( $x_a=7$  м и  $x_a=13$  м) координатах  $x_a$ . При  $x_a=7$  м эпицентр объекта  $V_0$  расположен в пределах измерительной линии  $M_1N_1$  на расстоянии 3 м от измерительного электрода, а при  $x_a=13$  м – вне этой линии на расстоянии 3 м от ближайшего электрода (см. **рис. 29**).

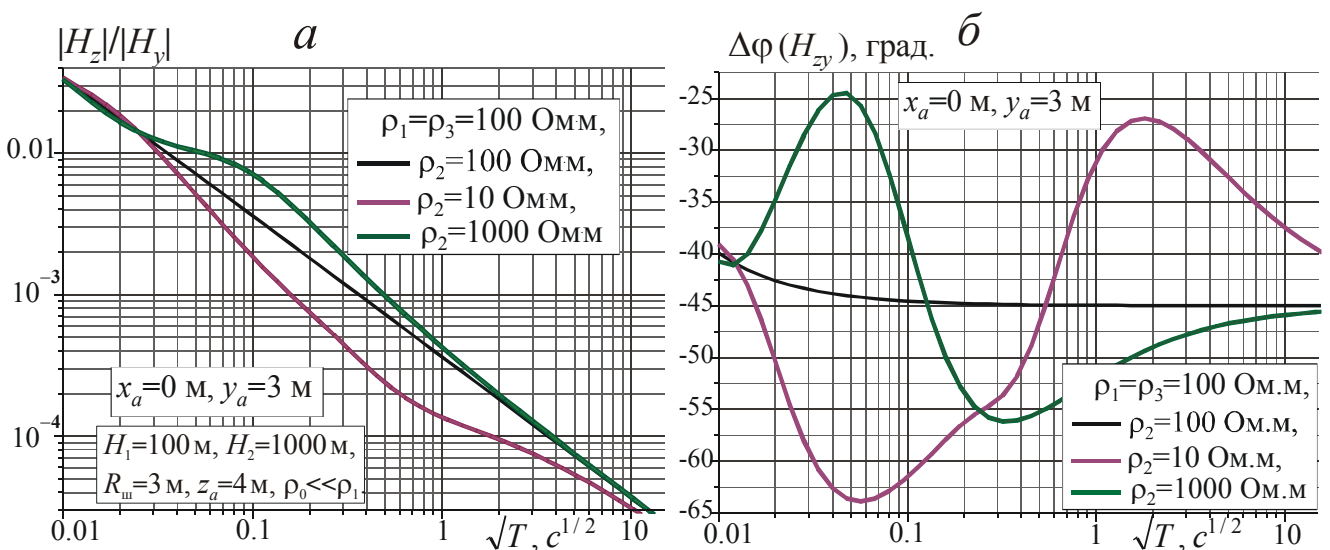
На **рис. 36** видим, что относительное влияние локального объекта  $V_0$  на  $\rho_T$  (и на компоненту  $E_x$  суммарного электрического поля) практически не зависит от

частоты  $f=1/T$ . Результаты расчётов показали также, что присутствие объекта  $V_0$  практически не влияет на аргумент импеданса  $\text{Arg}(Z_{xy})$  и, следовательно, на начальную фазу компоненты  $E_x$  суммарного электрического поля в плоскости  $z=0$ . Аналогичные выводы были сделаны и выше, при рассмотрении результатов моделирования для двухслойной модели проводящего полупространства (см. рис. 32).



**Рис. 36.** Зависимости кажущегося удельного электрического сопротивления  $\rho_T$  от  $\sqrt{T}$  для трёхслойной модели проводящего полупространства с объектом  $V_0$  в форме шара в верхнем слое

Приведём ещё пример результатов моделирования для отношения (обусловленной присутствием объекта  $V_0$ ) вертикальной компоненты  $H_z$  аномального магнитного поля и горизонтальной компоненты  $H_y$  магнитного поля, на которую согласно (15) при  $z=0$  не оказывает влияния объект  $V_0$ . На рис. 37, а показана зависимость отношения амплитуд  $|H_z|/|H_y|$  от  $\sqrt{T}$ . На этом рисунке



**Рис. 37.** Зависимости отношения амплитуд  $|H_z|/|H_y|$  (а) и разности фаз  $\Delta\phi(H_{zy})$  (б) от  $\sqrt{T}$  для трёхслойной модели проводящего полупространства с объектом  $V_0$  в верхнем слое

видим, что отношение амплитуд  $|H_z|/|H_y|$  убывает с ростом периода колебаний  $T$  (с уменьшением частоты  $f=1/T$ ). Отметим, что зависимость  $|H_z|/|H_y|$  от  $\sqrt{T}$  на **рис. 37, а** – монотонна, а при  $\rho_3=\rho_2=\rho_1$  (линия чёрного цвета) в логарифмическом масштабе эта зависимость близка к линейной. Пример расчётной зависимости разности фаз  $\Delta\varphi(H_{zy})=\varphi(H_z)-\varphi(H_y)$  от  $\sqrt{T}$  показан на **рис. 37, б**. Как видно на **рис. 37**, зависимости  $|H_z|/|H_y|$  и  $\Delta\varphi(H_{zy})$  от  $\sqrt{T}$  имеют существенные различия при  $\rho_1=\rho_2=\rho_3$ ,  $\rho_1<\rho_2>\rho_3$  и  $\rho_1>\rho_2<\rho_3$ .

Возможно, отмеченные особенности зависимостей отношения  $|H_z|/|H_y|$  и разности фаз  $\Delta\varphi(H_{zy})$  от  $\sqrt{T}$  могут быть критерием того, что на результаты МТЗ оказывает (либо не оказывает) влияние присутствие локального объекта  $V_0$  (или нескольких таких объектов). Кроме того, не исключено, что такие зависимости иногда могут послужить для (независимой от результатов измерений характеристик электрического поля  $E$ ) оценки соотношения между удельными электрическими сопротивлениями слоёв с горизонтальными границами. Это может быть актуальным в тех ситуациях, когда проведение измерений напряжений  $\mathcal{E}_{MN}$  электрического поля в методе МТЗ является затруднительным из-за проблем с заземлением электродов  $M$  и  $N$ . Понятно, что на практике, при нелинейной поляризации нормального поля, могут представлять интерес не только зависимости от  $\sqrt{T}$  отношения  $|H_z|/|H_y|$  и разности фаз  $\varphi(H_z)-\varphi(H_y)$ , но также аналогичные зависимости величин  $|H_z|/|H_x|$  и  $\varphi(H_z)-\varphi(H_x)$ .

Итак, в этом разделе было показано то, как применённый подход может послужить для математического моделирования влияния приповерхностных локальных неоднородностей ( $\rho$  – эффекта) на результаты МТЗ на основе приближённых, но относительно простых математических выражений (15), (20), (22).

Полученные результаты математического моделирования согласуются с приведенными в работах М. Н. Бердичевского и других учёных, занимавшихся разработкой теории и методики интерпретации результатов МТЗ, выводами о том, что влияние, оказываемое локальными объектами на измеряемые в методе МТЗ характеристики электрического поля, имеет преимущественно гальваническую природу. При тех моделях среды и нормального ЭМ поля, которые были применены при численных расчётах, относительное влияние объекта  $V_0$  на электрическую составляющую ЭМ поля на поверхности  $S$  проводящего полупространства и кажущееся удельное электрическое сопротивление  $\rho_T$  практически не зависит от частоты  $f=1/T$  (см. **рис. 32**, **рис. 36**). Показано, что отношение амплитуд  $|H_z|/|H_y|$  и разность фаз  $\varphi(H_z)-\varphi(H_y)$  испытывают влияние локального объекта  $V_0$  (см. **рис. 34**, **рис. 37**). Отношение  $|H_z|/|H_y|$  возрастает с увеличением частоты. Следует, всё же, ещё заметить, что (даже в рамках применённой нами модели) при очень больших величинах  $\sqrt{T}$  (низких частотах  $f$ ) амплитуда  $|H_z|\ll|H_y|$ . Понятно, что это может вызвать некоторые проблемы при определении отношения  $|H_z|/|H_y|$  и разности фаз  $\varphi(H_z)-\varphi(H_y)$ .

## **5. К методу заряда**

Подход, применённый в этом разделе при математическом моделировании, существенно отличается от тех, которыми пользовались выше. В рассматриваемой ситуации нет некоторого "внешнего" поля. В условиях метода заряда (в случае кусочно-однородных по  $\rho$  моделей среды) все источники стационарного электрического поля  $\mathbf{E}$  расположены на поверхностях разрыва  $\rho$ . Это – поверхность  $S_{\mathcal{E}}$  токового электрода  $A$ , поверхность  $S_0[V_0]$  локального объекта  $V_0$  – заряженного тела, а также граница  $S_B$  проводящего и непроводящего полупространств. Но сначала, наверное, необходимо, хотя бы кратко, напомнить о (по-видимому не очень часто применяемом в настоящее время в разведочной геофизике) методе заряда.

Метод заряда (метод заряженного тела) в электроразведке применяют, например, в рудной геологии – при разведке месторождений руд с высокой удельной электропроводностью  $\sigma=1/\rho$  по сравнению с рудовмещающими породами. При разведке рудных месторождений вскрытое горной выработкой, например скважиной, "тело"  $V_0$  с высокой удельной электропроводностью по сравнению с вмещающей средой "заряжают", заземляя в этом теле токовый электрод  $A$ . Второй токовый электрод  $B_{\infty}$  размещают на достаточно большом расстоянии от электрода  $A$  и точек наблюдения, чтобы поле электрода  $B_{\infty}$  не оказывало существенного влияния на результаты измерений. Заряды электродов  $A, B_{\infty}$  поддерживает сторонний ток  $I$  в линии  $AB$ . Метод заряда применяют также в гидрогеологии для определения направления и скорости движения пресных подземных вод.

При наземных измерениях по картам изолиний или картам графиков потенциала  $U$  электрического поля  $\mathbf{E}$  можно бывает проследить направление простираения хорошо-проводящих тел от точки заряда – от положения электрода  $A$ , а при благоприятных условиях – оконтурить эти тела. При большой глубине заряженного тела от земной поверхности применение метода заряда может быть эффективным при наличии системы горных выработок и проведении измерений в этих выработках, в частности – в скважинах.

Нами была сделана попытка на основе математического моделирования исследовать то, какое количественное влияние может оказать хорошо-проводящий, заряженный при помощи токового электрода  $A$  однородный объект  $V_0$  на результаты метода заряда. Некоторые из полученных при этом результатов моделирования будут представлены в разделе 5.2.

### **5.1. Методика расчётов**

Напомним, что стационарное электрическое поле  $\mathbf{E}$  – поле потенциальное ( $\text{rot } \mathbf{E}=0$ ) и его можно выразить через скалярный потенциал  $U$ :  $\mathbf{E}=-\text{grad } U$ . Вне стороннего поля (при  $\mathbf{E}^{\text{стр}}=0$ ) вектор плотности  $\mathbf{j}$  электрического тока и напряжённость поля  $\mathbf{E}$  связаны законом Ома в дифференциальной форме:  $\mathbf{j}=\sigma \cdot \mathbf{E}=\mathbf{E}/\rho$ . Единственными источниками стационарного электрического поля  $\mathbf{E}$

являются электрические заряды. В кусочно-однородных по удельному электрическому сопротивлению  $\rho$  моделях среды это – поверхностные заряды с поверхностной плотностью  $\Sigma$ , расположенные на поверхностях разрыва удельного электрического сопротивления  $\rho$ .

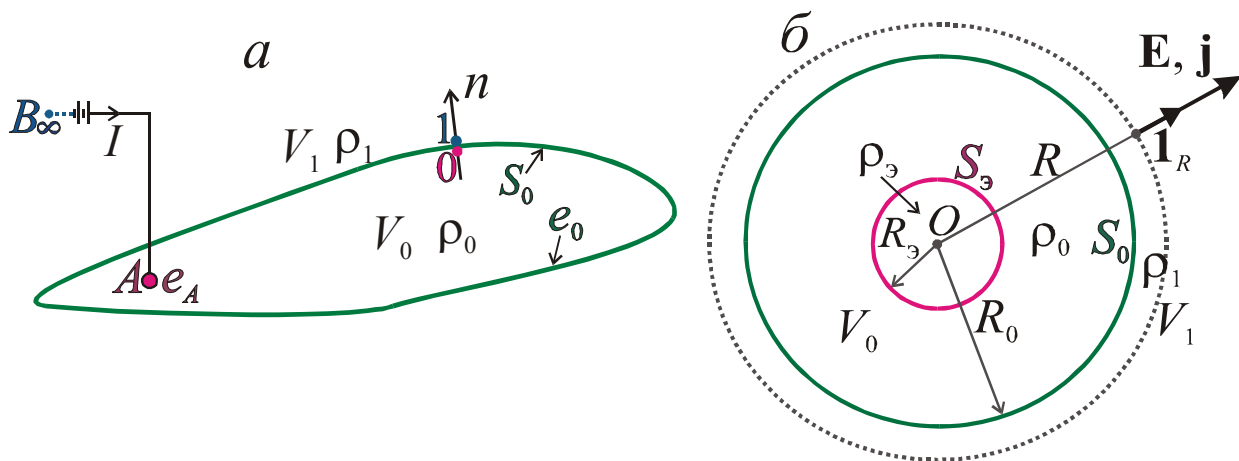
В случае стационарного поля  $\mathbf{E}$  и в отсутствие необъёмных токов на поверхностях  $S$  разрыва  $\rho$  справедлива поверхностная форма уравнения непрерывности электрического тока:

$$j_n^{(1)} = j_n^{(0)}, \quad (23)$$

где  $j_n^{(0)}$ ,  $j_n^{(1)}$  – скалярные компоненты вектора  $\mathbf{j}$  по направлению нормали  $n$  к поверхности  $S$  в двух расположенных по разные стороны  $S$  на бесконечно-малом расстоянии одна от другой точках "0" и "1" (см. рис. 38, а). Соответствующие  $n$  – компоненты электрического поля  $\mathbf{E}$  на таких поверхностях терпят разрыв, пропорциональный поверхностной плотности  $\Sigma$  электрических зарядов:

$$E_n^{(1)} - E_n^{(0)} = \Sigma / \varepsilon_0, \quad (24)$$

где  $\varepsilon_0 \approx 10^{-9}/(36 \cdot \pi)$ , Ф/м – электрическая постоянная.



**Рис. 38.** Токвый электрод  $A$  в объекте  $V_0$  (а); к определению зарядов  $e_3$ ,  $e_0$  на поверхностях  $S_3$ ,  $S_0$

На рис. 38, а показана кусочно-однородная модель среды, которая может отвечать условиям метода заряда. Здесь  $A$  – токвый электрод, расположенный в однородном проводящем объекте ("заряженном теле")  $V_0$  с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_0$ . Объект  $V_0$  окружён однородной вмещающей средой в области  $V_1$  с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_1$ . На рис. 38, а поверхность  $S_0$  – это граница однородных по  $\rho$  областей  $V_0$ ,  $V_1$ . Заряд  $e_A$  электрода  $A$  с эмиссией  $I_3 = I$  "поддерживает" постоянный электрический ток  $I$  в питающей линии  $AB$ . Как это принято, будем полагать, что такой ток  $I$  – это "ток по бесконечно – тонкому кабелю с бесконечно – высоким сопротивлением изоляции..." ([Альпин, 1971]). При этих условиях присутствие кабеля не вносит изменений в модель среды.

Известно (см., например, [Альпин, 1971]), что при нулевом удельном электрическом сопротивлении  $\rho_3$  токвого электрода  $A$ , окружённого однородной

средой с  $\rho = \rho_0$  заряд  $e_A$  электрода определяет выражение:  $e_A = \varepsilon_0 \cdot \rho_0 \cdot I$ . Определим то, чему при указанных условиях равен заряд  $e_0$  на границе  $S_0$  заряженного тела  $V_0$ . При этом будем полагать, что, что металлический токовый электрод  $A$  можно считать идеальным проводником с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_3 = 0$ .

На **рис. 38, б** показана сферически симметричная модель среды с имеющими общий центр  $O$  и сферическую форму границами  $S_3, S_0$ . В этом случае при  $\rho_3 = 0$  векторы  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  направлены по нормальям к границам  $S_3, S_0$  и в сферической системе координат с началом в точке  $O$  для сферически-симметричных полей  $\mathbf{j}, \mathbf{E}$  справедливы выражения:

$$\mathbf{j} = \mathbf{1}_R \cdot j_R(R), \quad \mathbf{E} = \mathbf{1}_R \cdot E_R(R). \quad (25)$$

Из (23) – (25) следует, что на сферической поверхности  $S_0$  поверхностная плотность зарядов

$$\Sigma = \varepsilon_0 \cdot (E_R^{(1)} - E_R^{(0)}) = \varepsilon_0 \cdot (\rho_1 j_R^{(1)} - \rho_0 j_R^{(0)}) = \varepsilon_0 \cdot j_R^{(S_0)} (\rho_1 - \rho_0),$$

где  $j_R^{(S_0)}$  – (непрерывная) на поверхности  $S_0$  компонента  $j_R$ . Принимая во внимание, что  $j_R^{(S_0)} = I / (4\pi \cdot R_0^2)$ , получаем для поверхностной плотности  $\Sigma$  зарядов на границе  $S_0$  выражение:

$$\Sigma = \varepsilon_0 \cdot (\rho_1 - \rho_0) \cdot I / (4\pi \cdot R_0^2) \quad \text{или} \quad \Sigma = \frac{\varepsilon_0 \rho_0 I}{4\pi R_0^2} \left( \frac{\rho_1}{\rho_0} - 1 \right).$$

Так как в модели на **рис. 38, б** на границе  $S_0$  поверхностная плотность зарядов  $\Sigma = \text{const}$ , для заряда  $e_0$  на  $S_0$  получаем выражение:  $e_0 = \Sigma \cdot S_0 = \Sigma \cdot 4\pi \cdot R_0^2$ . Следовательно, заряд на поверхности объекта  $V_0$

$$e_0 = \varepsilon_0 \rho_0 I \left( \frac{\rho_1}{\rho_0} - 1 \right), \quad \text{а заряд электрода } e_A = \varepsilon_0 \cdot \rho_0 \cdot I. \quad (26)$$

Выражение (26) для  $e_0$  получено для показанной на **рис. 38, б** сферически-симметричной модели, но оно очевидно справедливо и в более общем случае, например, для модели, показанной на **рис. 38, а**. Действительно, если точка наблюдения расположена на расстоянии от объекта  $V_0$  и его внешней границы  $S_0$ , во много раз превышающем максимальный линейный размер этого объекта, то поле заряда  $e_0$  должно быть идентично полю расположенного в центральной части области  $V_0$  точечного заряда, равного по величине  $e_0$ . Отсюда следует, что выражение (26) справедливо при любых форме и конечных размерах заряженного тела  $V_0$ .

При сравнении выражений (26) для зарядов  $e_0$  и  $e_A$  видим, что при  $\rho_1 \gg \rho_0$  заряд  $e_0 \gg e_A$ . В этом случае представляющее интерес в методе заряда электрическое поле в области  $V_1$  практически не зависит от заряда  $e_A$  и, следовательно, от положения токового электрода  $A$  в объекте  $V_0$ . Если же удельное электрическое сопротивление  $\rho_0$  заряженного тела  $V_0$  не очень мало по сравнению с удельным сопротивлением  $\rho_1$  вмещающей среды, то суммарное

электрическое поле, создаваемое зарядами  $e_0$  и  $e_A$ , существенно зависит от положения токового электрода  $A$  в области  $V_0$ .

В модели, показанной на [рис. 38, б](#), заряды равномерно распределены по сферической поверхности  $S_0$ . Понятно, что при иной, более сложной, форме границы  $S_0$  тела  $V_0$  заряды на этой границе не будут распределены равномерно. Но на этом этапе нами было принято (безусловно приближённое) допущение о равномерном распределении зарядов на границе  $S_0$ . То есть плотность  $\Sigma=e_0/s_0$ , где  $s_0$  – площадь поверхности  $S_0$ .

Для моделирования влияния проводящих заряженных тел  $V_0$  на результаты метода заряда нами были составлены программы для компьютера для случаев, когда в области  $V_0$  в точке  $A$  расположен точечный токовый электрод с эмиссией  $I$ , а область пространства  $V_0$  имеет форму эллипсоида вращения. В случае такой, кусочно-однородной, модели среды потенциал  $U$  поля  $\mathbf{E}$  в точке  $M$  определяет выражение:

$$U(M) = U_{\Pi} + U_{\text{В}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{e_A}{L_{AM}} + \oint_{S_0} \frac{\Sigma \cdot dS}{L_{qM}} \right\}, \quad (27)$$

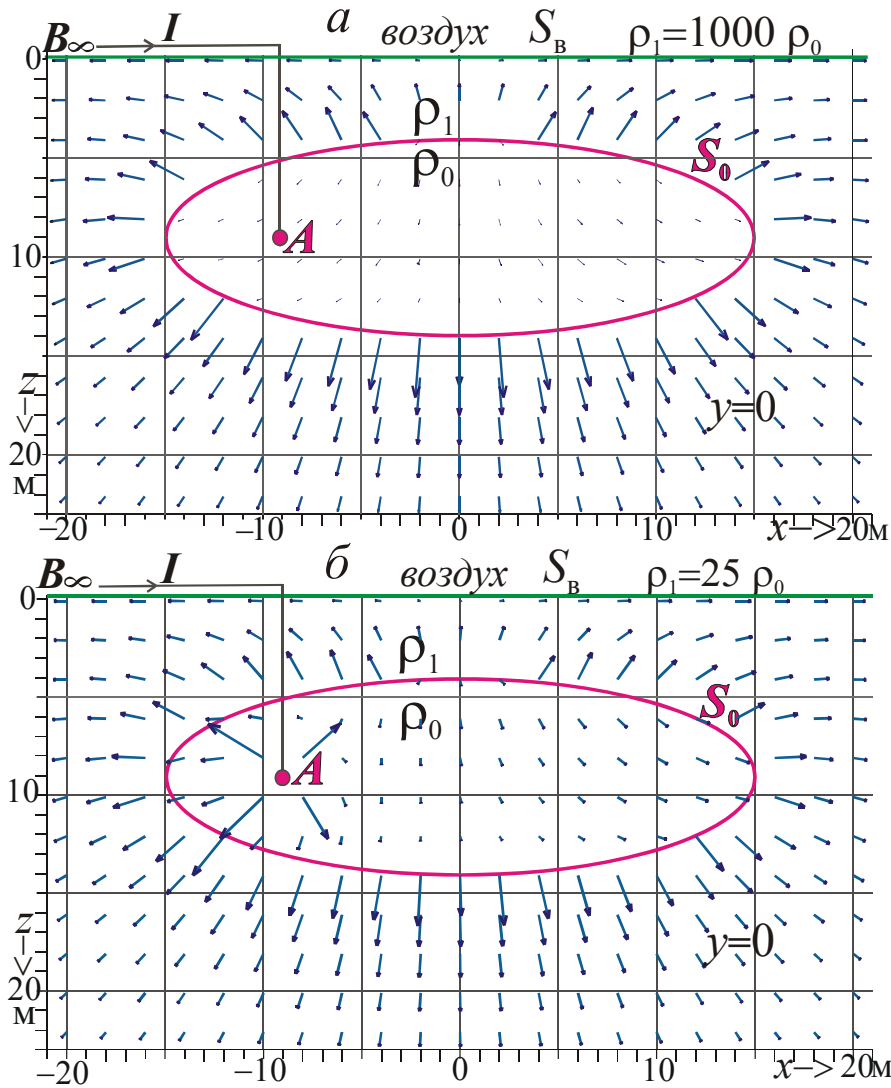
где  $q$  – произвольная точка на поверхности  $S_0$ ,  $U_{\Pi}$  – потенциал первичного поля, создаваемого зарядом  $e_A$  точечного электрода  $A$ , а  $U_{\text{В}}$  – потенциал вторичного поля, создаваемого поверхностными зарядами  $e_0$  на границе  $S_0$ ,  $L_{AM}$  и  $L_{qM}$  – расстояния между соответствующими точками.

В случаях, результаты моделирования для которых приведены на [рис. 39 – 42](#), для учёта влияния границы  $S_{\text{В}}$  между проводящим и непроводящим полупространствами (границы "земля – воздух"), как и в разделах 2, 4, был применён метод зеркальных изображений.

## 5.2. Результаты моделирования

На [рис. 39](#) показаны сечение модели среды проходящей через точечный электрод  $A$  и центр заряженного тела  $V_0$  плоскостью  $y=0$  и векторы суммарного электрического поля  $\mathbf{E}$  в этой плоскости в проводящем полупространстве  $z>0$  (ниже границы  $S_{\text{В}}$  "земля–воздух"). Заряженное тело  $V_0$  с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_0$  имеет форму эллипсоида вращения с осями  $l_x=30$  м,  $l_y=l_z=10$  м. Декартовы координаты центра  $O$  эллипсоида:  $x_o=y_o=0$ ,  $z_o=9$  м. Координаты точечного токового электрода  $A$ :  $x_A=-9$  м,  $y_A=0$ ,  $z_A=9$  м. Длины векторов на этом рисунке отражают абсолютные величины  $|\mathbf{E}|$  поля  $\mathbf{E}$  в разных точках модели.

Результаты моделирования, представленные на [рис. 39, а](#), получены при очень низком удельном электрическом сопротивлении  $\rho_0$  объекта  $V_0$  по сравнению с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_1$  вмещающей среды ( $\rho_1/\rho_0=1000$ ). На этом рисунке видно, что в соответствии с выражениями (26) для зарядов  $e_0$ ,  $e_A$  при очень низкой величине  $\rho_0$  по сравнению с  $\rho_1$  заряд  $e_A$  электрода  $A$  практически не оказывает влияния на суммарное электрическое поле  $\mathbf{E}$ .



**Рис. 39.** Векторы  $\mathbf{E}$  в плоскости, проходящей через центр объекта  $V_0$  и токовый электрод  $A$

Результаты моделирования на **рис. 39, б** получены при меньшем значении отношения  $\rho_1/\rho_0$  ( $\rho_1/\rho_0=25$ ). При этом согласно (26)  $e_0/e_A=24$ . На рисунке видно, что в этом случае вклад заряда  $e_A$  в суммарное электрическое поле  $\mathbf{E}$  более существенен, но при  $e_0=24 \cdot e_A$  влияние поля заряда  $e_A$  на суммарное поле заметно проявляется на небольших расстояниях от точки  $A$ . Эти особенности влияния заряда  $e_A$  электрода  $A$  на суммарное поле  $\mathbf{E}$  и, следовательно, на потенциал  $U$  этого поля, надо будет иметь в виду при

рассмотрении результатов моделирования на следующих рисунках.

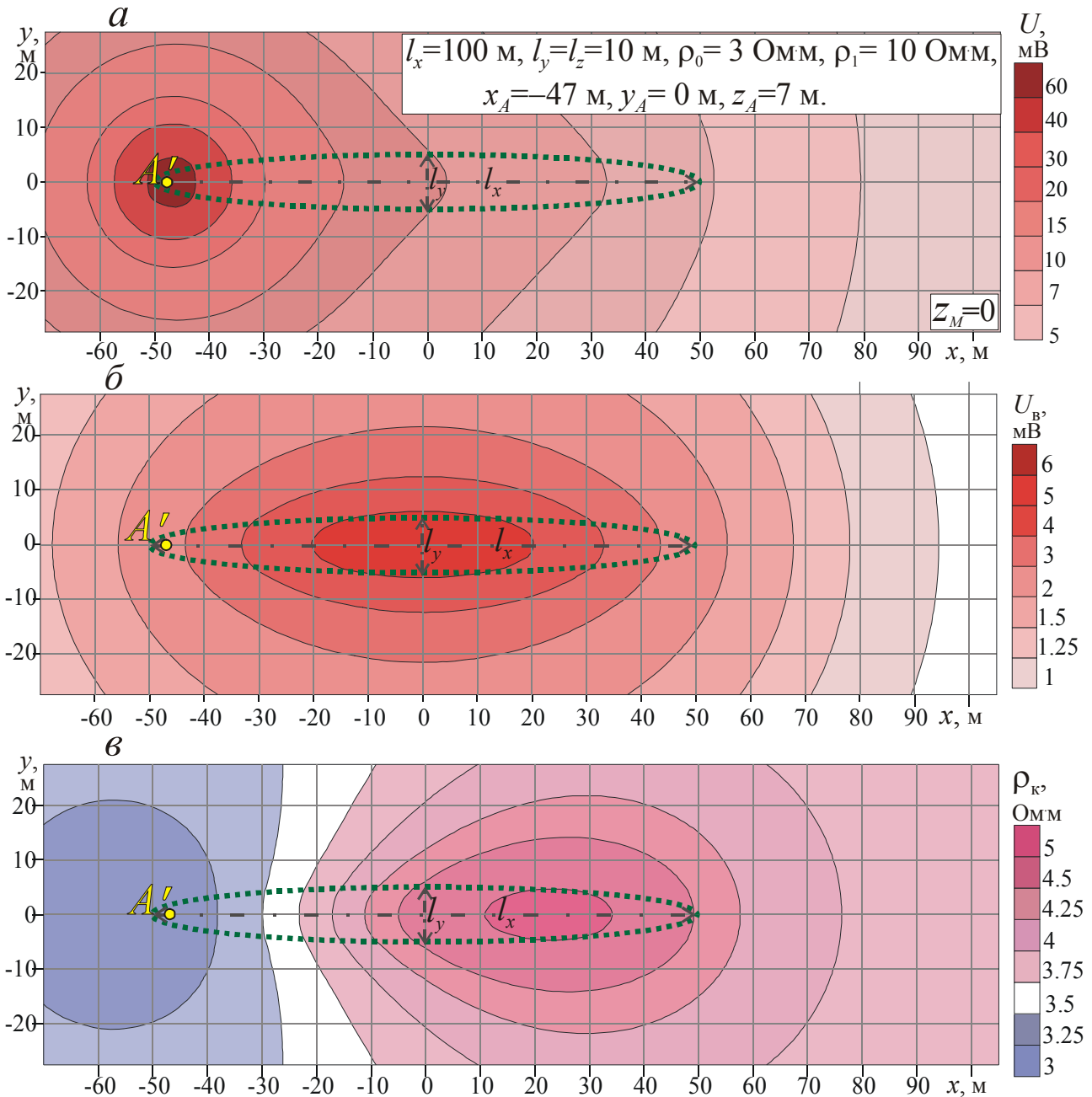
Во всех представленных на рисунках 40 - 42 примерах моделирования заряженное тело имеет форму эллипсоида вращения, вытянутого по направлению оси  $X$ . Оси эллипсоида:  $l_x=100$  м,  $l_y=l_z=10$  м, а координаты его центра  $O$ :  $x_o=y_o=0$ . Координаты точечного токового электрода  $A$ :  $x_A=-47$  м,  $y_A=0$ . При расчётах ток эмиссии  $I$  электрода  $A$  был принят равным 1 А. Величины  $\rho_0$ ,  $\rho_1$ ,  $z_o$ ,  $z_A$  имеют разные значения на этих рисунках, но на каждом рисунке координаты  $z_A$ ,  $z_o$  одинаковы и, конечно, электрод  $A$  расположен внутри объекта  $V_0$ . Пунктирной линией (зелёного цвета) на этих рисунках показана проекция  $V_0'$  заряженного тела  $V_0$  на плоскость  $S_B$  ( $z=0$ ). Показано также положение точки  $A'$  – проекции на эту плоскость точечного электрода  $A$ .

Результата моделирования, приведенные на **рис. 40**, получены при следующих значениях параметров модели:  $\rho_0=3$  Ом·м,  $\rho_1=10$  Ом·м,  $z_A=z_o=7$  м. То есть в этом случае удельное электрическое сопротивление  $\rho_0$  заряженного тела лишь в несколько раз меньше удельного сопротивления  $\rho_1$  вмещающей среды. Такое возможно при применении метода заряда в гидрогеологии. Согласно (26)



при указанных значениях  $\rho$  отношение  $\epsilon_0/e_A \approx 2.33$ . Заряженное тело расположено на небольшой глубине от границы  $S_B$ , по которой "перемещается" измерительный электрод  $M$ .

На рис. 40 показаны карты потенциала  $U(M)$ , потенциала  $U_B(M)$  вторичного поля и кажущегося удельного электрического сопротивления  $\rho_k(M)$  при фиксированном положении точечного токового электрода  $A$  в заряженном теле  $V_0$  и произвольном положении точки наблюдения  $M$  на границе  $S_B$  проводящего полупространства.  $U(M)$  – потенциал суммарного поля  $\mathbf{E}$ , которое создают заряд  $e_A = \epsilon_0 \cdot \rho_0 \cdot I$  токового точечного электрода  $A$ , поверхностный заряд  $e_0$  на границе



**Рис. 40.** Карты изолиний  $U$ ,  $U_B$  и  $\rho_k$  в плоскости  $z=0$

тела  $V_0$  и заряды индуцированные на границе  $S_B$ . Поле последних заменено полем зеркальных отражений зарядов  $e_A$  и  $e_0$  в плоскости  $S_B$ .

На **рис. 40, б** показана карта потенциала  $U_B$  вторичного поля в плоскости  $S_B$ . Этот потенциал  $U_B(M)=U(M)-U_{\Pi}(M)$ . При учёте влияния границы  $S_B$  потенциал первичного поля определяет выражение:

$$U_{\Pi}(M) = 2 \frac{\rho_0 \cdot I}{4\pi \cdot \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + z_A^2}}. \text{ Поле с потенциалом } U_B \text{ в точках } M$$

создают поверхностный заряд  $e_0$  и его "зеркальное отражение" в плоскости  $S_B$ .

Так как метод заряда иногда относят к группе методов сопротивлений электроразведки (см., например, [Якубовский, Ренард, 1991]), представляло интерес опробовать то, какую дополнительную информацию в методе заряда могут дать карты кажущегося удельного сопротивления  $\rho_k$  – параметра, вычисляемого для интерпретации результатов измерений в других методах сопротивлений электроразведки. Кажущееся удельное сопротивление  $\rho_k(M)$  для двухэлектродной установки  $AM$  (электроды  $B_{\infty}, N_{\infty}$ ) было определено по формуле:  $\rho_k = K \cdot (U(M)/I)$ . В присутствии границы  $S_B$  проводящего и непроводящего полупространств и расположении электрода  $M$  на этой границе коэффициент установки  $K=2\pi \cdot L_{AM}$ , где  $L_{AM}$  – расстояние между токовым электродом  $A$  и измерительным электродом  $M$ .

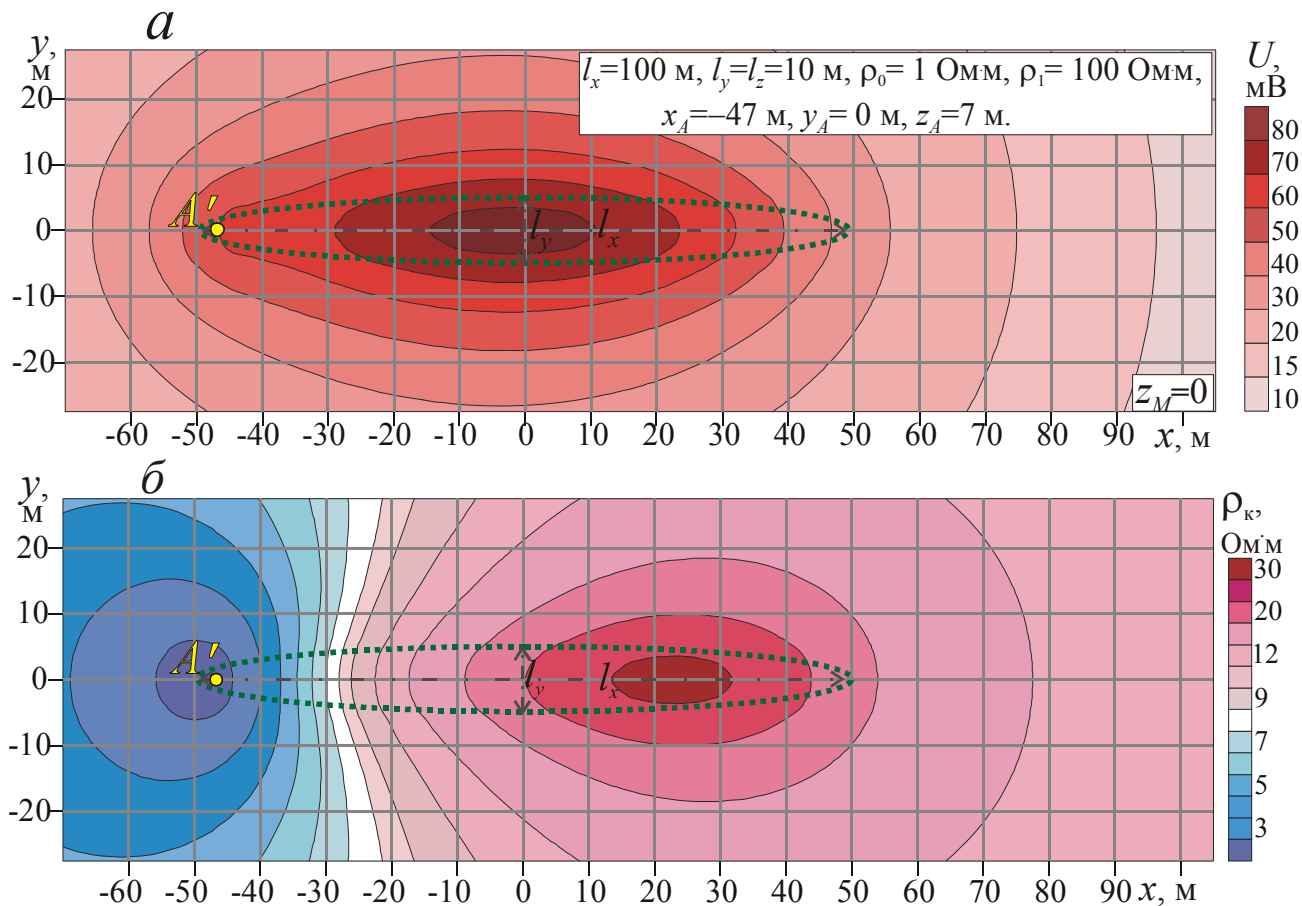
Как уже было отмечено, одной из задач, для решения которой применяют метод заряда, является прослеживание простирания хорошо-проводящего тела по карте изолиний потенциала  $U$ , либо по карте графиков  $U$ . При сравнении **рис. 40, а** (карта изолиний  $U$ ) с **рис. 40, б** (карта изолиний  $U_B$ ) видно, что при не очень низком удельном сопротивлении  $\rho_0$  неглубоко залегающего заряженного тела по сравнению с  $\rho$  вмещающей среды карта изолиний потенциала  $U_B$  значительно информативнее для решения такой задачи по сравнению с картой потенциала  $U$ .

Причина этого понятна. При указанных условиях значительный вклад в потенциал  $U$  суммарного поля  $E$  в точках измерения  $M$  вносит заряд  $e_A$  токового электрода, который никак не зависит от пространственного положения заряженного тела. Правда, при сравнении **рис. 40, а, б** видно, значения  $U_B$  могут быть на порядок ниже по сравнению со значениями  $U$ . Это означает, что при расчёте потенциала  $U_B=U-U_{\Pi}$  в методе заряда повышаются требования к точности измерений  $U$ , а также – к определению расстояний  $L_{AM}$ , величин  $I, \rho_0$ , от которых зависят вычисляемые значения потенциала первичного поля  $U_{\Pi}$ .

На **рис. 40, в** приведена карта кажущегося удельного электрического сопротивления  $\rho_k$ . Как уже было отмечено, в случае двухэлектродной установки  $AM$  (электроды  $B_{\infty}, N_{\infty}$ ) значение  $\rho_k(M)$  отличается от потенциала  $U(M)$  множителем  $2\pi \cdot L_{AM}/I$ . Поэтому применительно к методу заряда величина  $\rho_k(M)$  в меньшей степени, чем  $U(M)$ , зависит от расстояния  $L_{AM}$  от точки  $M$  до заряда  $e_A$ . На **рис. 40** видно, что карта  $\rho_k$  существенно отличается по виду от карт  $U$  и  $U_B$ . Минимальные значения  $\rho_k$  мы наблюдаем в окрестности проекции  $A'$  на плоскость  $S_B$  электрода  $A$ . Зона повышенных значений  $\rho_k$  смещена от точки  $A'$  в сторону

простирается вытянутого по оси  $X$  заряженного тела  $V_0$ . Судя по полученным результатам моделирования, при определённых условиях и достаточно высокой точности измерений потенциала  $U$  построение карт  $\rho_k$  может дать важную дополнительную информацию при интерпретации результатов измерений в методе заряда.

Параметры модели, для которой получены результаты расчётов на [рис. 41](#), те же, что и у модели, соответствующей [рис. 40](#), за исключением значений удельных электрических сопротивлений  $\rho_0$  и  $\rho_1$ . Результаты моделирования на [рис. 41](#) получены при  $\rho_0=1$  Ом·м,  $\rho_1=100$  Ом·м, то есть удельное электрическое сопротивление объекта  $V_0$  в сто раз меньше удельного электрического сопротивления вмещающей этот объект среды. В соответствии с (26) при этих условиях заряд  $e_A$  электрода  $A$  в 99 раз меньше заряда  $e_0$  на поверхности  $S_0$  тела  $V_0$ . Из этого следует, что суммарное электрическое поле  $\mathbf{E}$  незначительно отличается от вторичного поля, создаваемого поверхностным зарядом. На



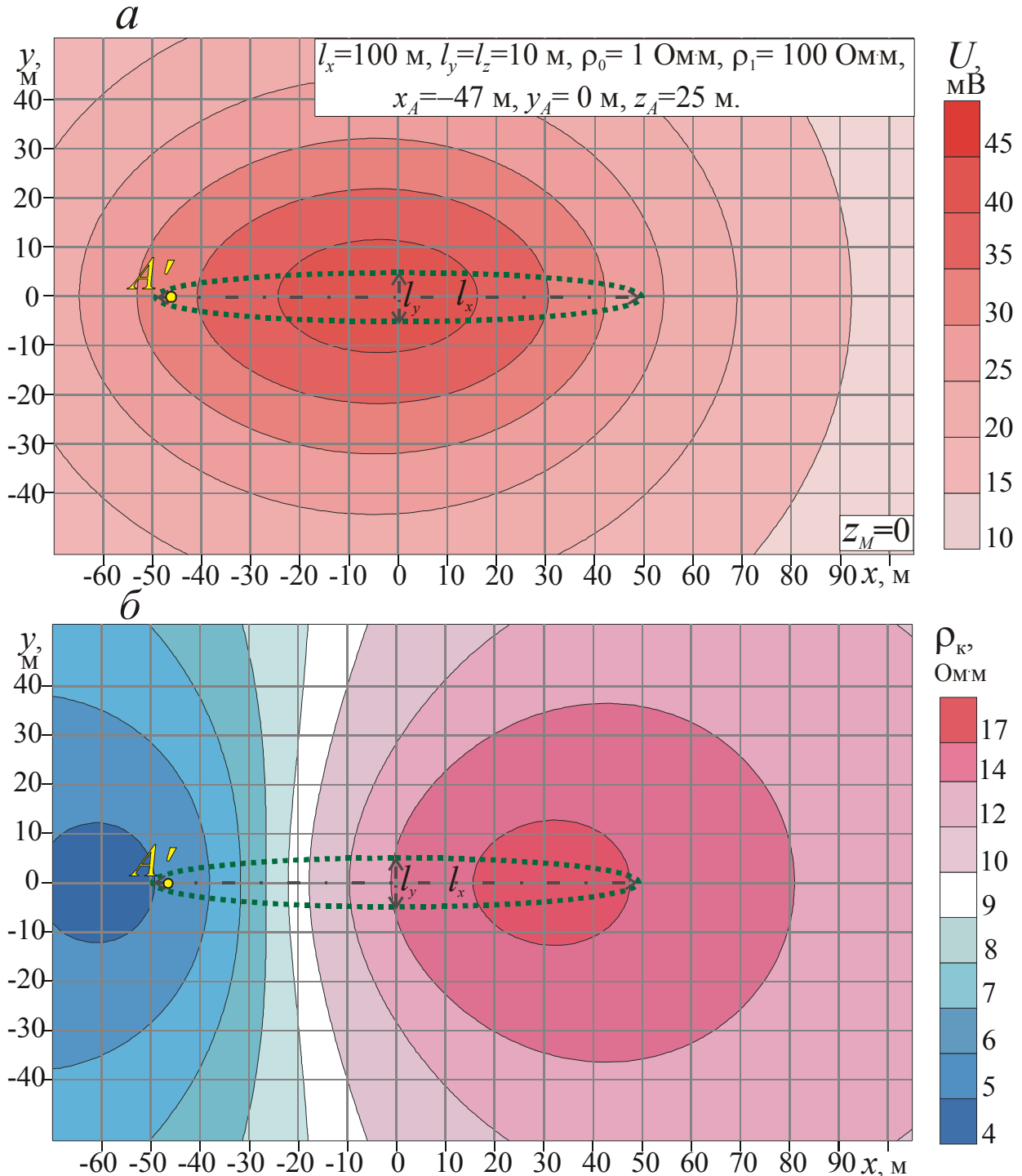
**Рис. 41.** Карты изолиний  $U$  и  $\rho_k$  в плоскости  $z=0$

[рис. 41, а](#) видно, что при указанных параметрах модели по карте изолиний потенциала  $U$  суммарного поля  $\mathbf{E}$  не сложно установить направление простирается хорошо проводящего заряженного тела.

На [рис. 41, б](#) показана карта изолиний  $\rho_k$ . Видим, что при очень низком удельном электрическом сопротивлении объекта  $V_0$  по сравнению с вмещающей средой диапазон изменения  $\rho_k$  – значительно выше, чем на [рис. 40, в](#). В пределах карты на [рис. 41, б](#) значения  $\rho_k$  меняются от 2-х Ом·м до 30-и Ом·м. Как и на

рис. 40, в минимальные значения  $\rho_k$  мы наблюдаем в окрестности точки  $A'$ , а максимальные значения  $\rho_k$  смещены от этой точки по направлению простираения объекта  $V_0$ .

То, как скажется на картах изолиний  $U$  и  $\rho_k$  увеличение расстояния от хорошо-проводящего объекта  $V_0$  до плоскости  $S_B$  (увеличение "глубины

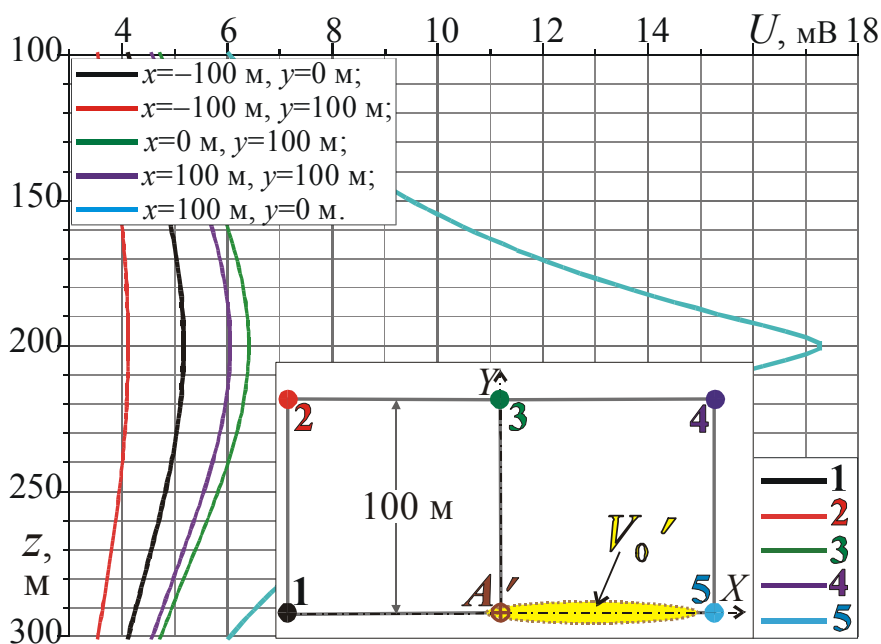


**Рис. 42.** Карты изолиний  $U$  и  $\rho_k$  в плоскости  $z=0$

залегания" заряженного тела), при низком значении  $\rho_0$  ( $\rho_1=100 \cdot \rho_0$ ) можно увидеть при сравнении рис. 42 и рис. 41. Результаты моделирования на рис. 42 получены при  $z_0=z_A=25$  м.

Конечно, при увеличении "глубины"  $z_0$  форма изолиний потенциала  $U$  становится более изометричной. Понятно, что в рамках применённой модели в предельном случае, при  $z_0 \gg l_x$ , эти изолинии по форме должны быть близки к окружностям с центром в эпицентре объекта  $V_0$ . На **рис. 42, б** видно, что, как и в предыдущих примерах, направление наиболее резкого возрастания значений  $\rho_k$  от точки  $A'$  совпадает с направлением простирания объекта  $V_0$ . При сравнении рисунков **41, б, 42, б** мы видим, что с увеличением глубины  $z_0$  заряженного тела пределы изменения  $\rho_k$  уменьшаются, но при высокой контрастности объекта и вмещающей среды по удельному электрическому сопротивлению эти пределы могут быть значительными. На **рис. 42, б** в пределах карты величина  $\rho_k$  меняется в 4 раза.

Рассмотрим теперь результаты расчётов для модели, которая может отвечать условиям измерения характеристик поля заряженного тела в скважинах. Пусть одной (единственной) из вертикальных скважин, пробуренных по сети  $100 \text{ м} \times 100 \text{ м}$ , вскрыт хорошо-проводящий объект  $V_0$ . Надо определить направление простирания этого объекта, зарядив его при помощи токового электрода  $A$  и измеряя характеристики электрического поля в других скважинах. Будем полагать, что параметры модели среды – те же, для которой приведены



**Рис. 43.** Зависимости потенциала  $U$  от "глубины"  $z$  и схема расположения "скважин" на плоскости  $S_B$ ; проекции  $A'$  электрода  $A$  и  $V_0'$  объекта  $V_0$  на эту плоскость

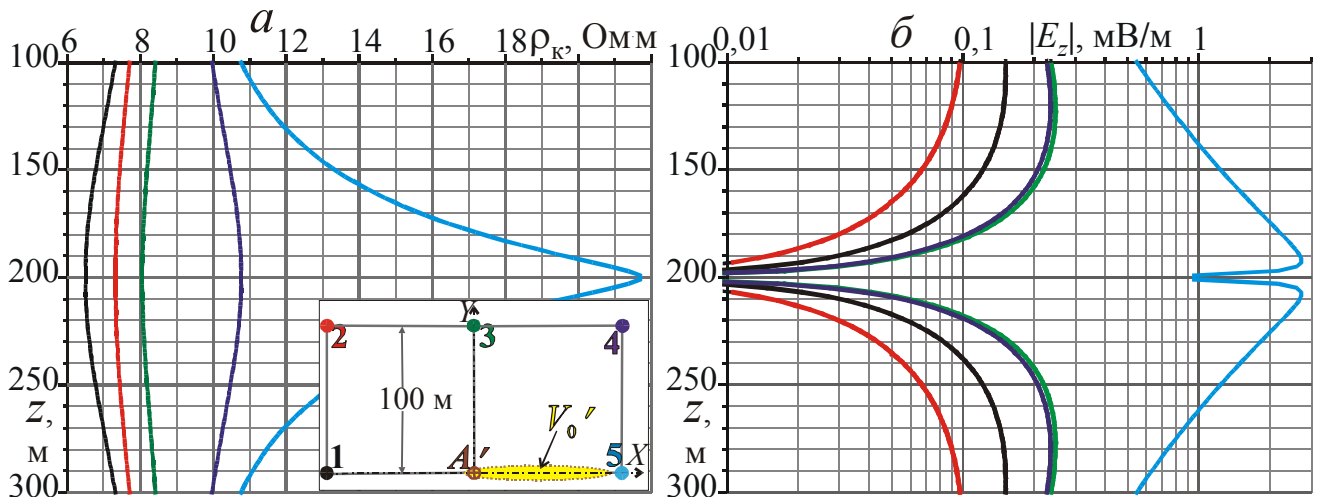
результаты расчётов на **рис. 41, 42**, то есть  $l_x=100 \text{ м}$ ,  $l_y=10 \text{ м}$ ,  $l_z=10 \text{ м}$ ,  $\rho_0=1 \text{ Ом}\cdot\text{м}$ ,  $\rho_1=100 \text{ Ом}\cdot\text{м}$ ,  $I=1 \text{ А}$ . Но центр объекта  $V_0$  в форме эллипсоида, вытянутого по направлению оси  $X$ , имеет координату ("глубину")  $z_0=200 \text{ м}$ .

На **рис. 43** изображено то, как в плоскости  $S_B$  ( $z=0$ ) расположены "устья скважин", а также показаны проекция  $A'$  электрода  $A$  и проекция

$V_0'$  объекта  $V_0$  на эту плоскость. При расчётах не учитывалось влияние границы  $S_B$ , а также влияние скважин. Зависимости потенциала  $U(M)$  суммарного электрического поля  $E$  от координаты  $z$  ("глубины" точки  $M$ ) показаны на **рис. 43**. Конечно, максимальные значения  $U$  мы наблюдаем на каждой из кривых  $U(z)$  при  $z=z_0=200 \text{ м}$ . Результаты моделирования позволяют количественно оценить влияние объекта  $V_0$  на значения  $U$  при разном положении "скважин" относительно заряженного тела. В случае, когда точка наблюдения  $M$  перемещается на

минимальном (7 м) расстоянии от объекта  $V_0$  (график "5",  $x=100$  м,  $y=0$ ), максимальные значения  $U$  равны 17 мВ. На остальных кривых максимальные значения  $U$  в несколько раз меньше (4 мВ - 6.5 мВ). Однако принимая во внимание то, что расстояние от объекта  $V_0$  до "скважины" 5 (см. [рис. 43](#)) во много раз меньше расстояний до "скважин" 1 - 4 различия в максимальных значениях  $U$  на кривых  $U(z)$  – не так уж велики. По-видимому, это обусловлено тем, что источники электрического поля распределены по всей границе  $S_0$  имеющего большую протяжённость объекта  $V_0$ , а согласно (27) потенциал  $U(M)$  поля каждого элементарного источника – заряда  $\Sigma \cdot dS$  с центром в точке  $q$  на поверхности  $S_0$  медленно убывает с удалением от этого источника (как  $1/L_{qM}$ ).

На [рис. 44, а](#) приведены зависимости от координаты  $z$  точки наблюдения  $M$  кажущегося удельного электрического сопротивления  $\rho_k = K \cdot U(M) / I$ . В отсутствии влияния границы "земля–воздух"  $S_B$  коэффициент двухэлектродной установки  $AM$   $K = 4\pi \cdot L_{AM}$ . При сравнении [рис. 44, а](#), [рис. 43](#) видим, что из-за пропорционального расстоянию  $L_{AM}$  множителя  $K$  в выражении для  $\rho_k$  кривые  $\rho_k(z)$  несколько



**Рис. 44.** Зависимости кажущегося удельного сопротивления  $\rho_k$  (а) и абсолютной величины  $|E_z|$  компоненты  $E_z$  (б) от "глубины"  $z$

отличаются по форме от графиков  $U(z)$ . Но относительное различие экстремальных значений на графиках  $\rho_k(z)$  – примерно такое же, как у кривых  $U(z)$ . При перемещении точки наблюдения  $M$  на минимальном расстоянии от объекта  $V_0$  (график "5",  $x=100$  м,  $y=0$  м) максимальные значения  $\rho_k$  лишь в 2 - 3 раза больше экстремальных значений  $\rho_k$  на других кривых. То есть в отличие от тех условий, результаты моделирования для которых были приведены на [рис. 40 – рис. 42](#) в рассматриваемом случае зависимости  $\rho_k(z)$  не дают дополнительной информации в "скважинной модификации" метода заряда.

На [рис. 44, б](#) приведены зависимости от  $z$  абсолютной величины  $|E_z|$  компоненты  $E_z = -\partial U / \partial z$ . Этой компоненте пропорционально напряжение  $\mathcal{E}_{MN}$  электрического поля  $\mathbf{E}$  в параллельной оси  $Z$  короткой измерительной линии  $MN$ . Напряжение  $\mathcal{E}_{MN} \approx E_z \cdot L_{MN}$ , где  $L_{MN}$  – расстояние между измерительными электродами  $M, N$ . Понятно, что при тех координатах  $z$ , при которых на кривых

$U(z)$  максимумы, производная  $\partial U/\partial z=0$  и компонента  $E_z=0$ . Максимальные значения  $|E_z|$  мы наблюдаем при тех координатах  $z$ , при которых происходит наиболее резкое изменение функции  $U(z)$ . При сравнении зависимостей  $|E_z|(z)$  на [рис. 44, б](#) видим, что при минимальном расстоянии от объекта  $V_0$  до "скважины" (график "5" синего цвета) максимальное значения  $|E_z|$  составляет около 2.5 мВ/м. На остальных кривых максимальные значения  $|E_z|$ : 0.1 – 0.25 мВ/м, то есть на порядок или более ниже, чем на графике "5". Сравнение результатов моделирования на [рис. 43 – 44](#) показывает, что по графику  $\mathcal{E}_{MN}(z)$  можно увереннее (по сравнению с кривыми  $U(z)$  и  $\rho_k(z)$ ) судить о том какая из "скважин" пройдена на ближайшем расстоянии от заряженного тела.

Приведенные на [рис. 43 – 44](#) результаты моделирования показали следующее. Если хорошо-проводящее тело  $V_0$  вскрыто одной скважиной, то при применении метода заряда с целью определения направления простирания заряженного тела  $V_0$  в соседних скважинах целесообразно проведение измерений не только потенциала  $U(M)$  поля  $\mathbf{E}$ , но и напряжения  $\mathcal{E}_{MN}$  поля  $\mathbf{E}$  в ориентированной вдоль скважины короткой измерительной линии  $MN$ . Это напряжение более "чувствительно" к расстоянию до заряженного тела, чем потенциал  $U$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Альпин Л. М. Источники поля в теории электроразведки. «Прикладная геофизика»; сборник статей; выпуск 3, Гостоптехиздат, 1947, С. 56 - 100.
2. Альпин Л. М. Практические работы по теории поля. М., "Недра", 1971, 305 с.
3. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебник для ВУЗов, 1985, М., "Недра", 407 с.
4. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебник для ВУЗов. Часть III. Глава четвёртая "Стационарное электрическое поле". Глава пятая "Магнитное поле постоянного тока", 2020, 106 с. [Электронный ресурс/Текст]. <https://elibrary.ru/item.asp?id=41782333>.
5. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебник для ВУЗов. Часть IV. Глава шестая "Переменное электромагнитное поле". Глава седьмая "Прямая задача теории переменного электромагнитного поля", 2020, 104 с. [Электронный ресурс/Текст]. <https://elibrary.ru/item.asp?id=42803479>.
6. Бердичевский М. Н., Жданов М. С. Интерпретация аномалий переменного электромагнитного поля Земли. М.: "Недра", 1981. 327 с.
7. Бердичевский М. Н., Яковлев А. Г. Аналитическая модель магнитотеллурического зондирования, искаженного эффектом  $S$ . "Физика Земли". 1989, № 9, с. 82–88.
8. Бердичевский М. Н., Дмитриев В. И. Модели и методы магнитотеллурики. М.: Научный мир, 2009. 680 с.
9. Бобачев А.А., Марченко М.Н., Модин И.Н., Перваго Е.В., Урусова А.В., Шевнин В.А. Новые подходы к электрическим зондированиям горизонтально-неоднородных сред. Физика Земли, N 12, 1995г., С. 79-90.
10. Дахнов В. Н. Интерпретация результатов геофизических исследований разрезов скважин. Учебник для вузов. М. Недра, 1972г., 365 с.
11. Дашевский Ю.А. Применение преобразования Эйлера для расчета стационарных и гармонических электромагнитных полей в горизонтально-слоистых средах. В кн. Электромагнитные методы геофизических исследований. ИГ и Г СОАН СССР. Новосибирск, 1982. с. 78- 88.
12. Дмитриев В. И. Магнитотеллурическое поле в тонких неоднородных слоях. В кн. Вычислительные методы и программирование, вып. 13. Изд-во МГУ, 1969 г., с. 231- 236.
13. Ермохин К.М. «Решение трехмерных задач детальной электро- и магниторазведки на основе метода объемных дипольных источников». Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктор технических наук. СПб, 1998, 41 с.
14. Заборовский. А. И. Электроразведка. М.: Гостоптехиздат, 1963, 419 с.



15. Земцов В.Н., Шак В.Г. Электрические зондирования на постоянном токе в рудных районах. М., Недра, 1990, 107 с.
16. Каринский А. Д., Даев Д. С. Об областях пространства, существенно влияющих на результаты измерений в электромагнитных методах. // «Геофизика». Научно-технический журнал. ЕАГО, 2012, № 6, С. 41- 53.
17. Каринский А. Д., Даев Д. С., Мазитова И. К. Определение областей пространства, оказывающих существенное влияние на результаты электромагнитных методов геофизики. XI Международная конференция “Новые идеи в науках о Земле”. Доклады. М., 2013, том 1, с. 393- 394.
18. Каринский А. Д., Даев Д. С., Мазитова И. К. Математическое моделирование С-эффекта и Р-эффекта в методах сопротивлений электроразведки. // «Геофизика». Научно-технический журнал ЕАГО, 2014, № 1, С. 36- 44.
19. Каринский А. Д., Даев Д. С., Красносельских А. А., Мазитова И. К. Математическое моделирование влияния приповерхностных локальных неоднородностей на результаты магнитотеллурических зондирований. «Геофизика». Научно-технический журнал, ЕАГО, 2014, № 6, с. 62- 70.
20. Каринский А. Д., Даев Д. С., Мазитова И. К., Юдин М. Н. Математическое моделирование влияния локальных объектов на результаты методов сопротивлений электроразведки. // Международная научно-практическая конференция "Теория и практика разведочной и промысловой геофизики", г. Пермь, 24–26 ноября 2016 г. Сборник научных трудов. С. 122- 126.
21. Каринский А. Д., Даев Д. С. Влияние локальных объектов на результаты электроразведки методом сопротивлений; опыт математического моделирования. «Геофизика». Научно-технический журнал. Евро-Азиатское Геофизическое Общество, 2017, № 1, С. 35- 43.
22. Каринский А. Д., Даев Д. С., Филатова И. К., Юдин М. Н.. Моделирование влияния имеющих разную форму объектов на результаты электропрофилеирования. Материалы Международной научно-практической конференции "Теория и практика разведочной и промысловой геофизики", г. Пермь, 23–24 ноября 2017 г., С. 111- 116.
23. Каринский А. Д., Даев Д. С., Филатова И. К.. Влияние локальных объектов на результаты электропрофилеирования и каротажа сопротивления; опыт математического моделирования. Международная научно-практическая конференция // «Стратегия развития геологического исследования недр: настоящее и будущее». К 100-летию МГРИ-РГГРУ, 4–6 апреля 2018 г., том 1, С. 388- 389.
24. Каринский А. Д., Даев Д. С., Юдин М. Н. Математическое моделирование влияния локальных проводящих объектов на результаты каротажа сопротивления. // Материалы Международной научно-практической конференции "Теория и практика разведочной и промысловой геофизики", г. Пермь, 22–23 ноября 2018 г., С. 177- 183.
25. Каринский А. Д., Кузнецов Н. М. Определение областей пространства, влияющих на результаты радиоволнового просвечивания. // Изв. вузов. Геология и разведка. 2019. № 3, С. 72- 76.

26. Каринский А. Д., Кудина Я. О., Матюшенко А. А. Трёхслойные кривые МТ-зондирования в присутствии локального объекта; результаты математического моделирования. В сборнике: "Разведочная геофизика и геоинформатика". Материалы Всероссийской научно-практической конференции. 2021. С. 33-37. <https://elibrary.ru/item.asp?id=44686804>.
27. Каринский А. Д., Даев Д. С. Влияние расположенного в трёхслойной модели среды приповерхностного локального объекта на результаты МТЗ; опыт математического моделирования. VIII Всероссийская школа-семинар ЭМЗ-2021, Москва, 4-9 октября 2021. <https://elibrary.ru/item.asp?id=47948886>.
28. Каринский А. Д. Практикум по "Теории поля". [Электронный ресурс/Текст]: учебное пособие. – М., 2022. 104 с. <https://elibrary.ru/item.asp?id=48623554>;
29. Кузнецов Н.М. Опыт применения радиоволновой геоинтроскопии межскважинного пространства для разведки золотомедного месторождения // Разведка и охрана недр. 2008. № 12. С. 27-29.
30. Кузнецов Н.М. Способ 3D обработки данных радиоволнового просвечивания межскважинного пространства. Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле. 2012. № 1. Выпуск № 19, С. 240- 246.
31. Модин И. Н. "Электроразведка в технической и археологической геофизике" (<http://www.dissercat.com/content/elektrozrazvedka-v-tekhnicheskoi-i-arkheologicheskoi-geofizike>), 2010 г. 274 с.
32. Семенов М. В., Сапожников В. М., Авдевич М. М., Голиков Ю. В. Электроразведка рудных полей методом заряда. Л.: Недра, 1984. 216 с.
33. Светов Б. С. Основы геоэлектрики. // М.: Издательство ЛКИ, 2008, 656 с.
34. Петровский А. А., Достовалов Б. Н. Первые опыты просвечивания вечной мерзлоты электромагнитными волнами // Труды института мерзлотоведения АН СССР. 1947. Т. 5. С. 121-160.
35. Loke M. H. and Dahlin T. A. comparison of the Gauss-Newton and quasi-Newton methods in resistivity imaging inversion. // Journal of Applied Geophysics, 2002, 49, pp. 149–162.
36. McGillivray P. R. and Oldenburg D. W. Methods for calculating Frechet derivatives and sensitivities for the non-linear inverse problem: a comparative study. // Geophysical Prospecting, 1990, 38, pp. 499-524.
37. Петровский А.Д. Радиоволновые методы в подземной геофизике. М.: Недра, 1971. 290 с.
38. Электроразведка. Пособие по электроразведочной практике для студентов геофизических специальностей. Под редакцией В. К. Хмелевского, И. Н. Модина, А. Г. Яковлева – М.: 2005. - 311 стр. Издательство ГЕРС.
39. Электроразведка методом сопротивлений. Под редакцией В. К. Хмелевского, В. А. Шевнина –: 1994. - 160. Издательство МГУ.
40. Яковлев А. Г. " Влияние геоэлектрических неоднородностей на результаты электромагнитных зондирований". Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. М, 1989, 30 с.

41. Якубовский Ю. В., Ренард И. В. Электроразведка. Учебник для вузов. М.: Недра, 1991. 359 с.
42. Groom R. W., Bailey R. C. 1991. Analytic investigations of the effects of near-surface three-dimensional galvanic scatters on MT tensor decompositions, *Geophysics* 56, 4, 496-518.
43. Dahlin T. and Zhou B. A numerical comparison of 2D resistivity imaging with 10 electrode arrays. *Geophysical Prospecting*, 2004, 52, 379–398.
44. Doll H.G. The Microlog – f New Electrical Logging Method for Detailed Determination of Permeable Beds. *J. Petr. Techn.*, VI, vol. 2, No. 6, 1950.
45. Kaufman A.A., and Keller G.V. *The Magnetotelluric Sounding Method.* – Elsevier, Amsterdam. Stratton, J. *Electromagnetic Theory.* McGraw – Hill, New York, 1981.
46. Loke M.H. and Dahlin T. A comparison of the Gauss-Newton and quasi-Newton methods in resistivity imaging inversion. *Journal of Applied Geophysics*, 2002 , 49, 149–162.
47. McGillivray P.R. and Oldenburg D.W. Methods for calculating Frechet derivatives and sensitivities for the non-linear inverse problem: a comparative study. *Geophysical Prospecting*, 1990, 38, 499-524.
48. Wannamaker Ph. E., Stodt J. A., Rijo L. 1987. A stable finite element solution for two-dimensional magnetotelluric modeling, *Geophys. J.R. astron. Soc.* 88, 277-296.